

"СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

МАТЕМАТИКА

**Программа и контрольные задания на 2-ой семестр
для студентов – заочников ускоренной формы обучения**

Красноярск, 2013

УДК 517
ББК 22.11

Высшая математика. Программа и контрольные задания на 2-ой семестр для студентов I курса ускоренного обучения заочного факультета.– Красноярск: СФУ.– 2013.– 14 с.

Составили: Анатолий Ильич Созутов
Николай Михайлович Сучков
Михаил Васильевич Янченко

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

По ходу изучения курса высшей математики на 1-ом курсе студент должен выполнить во втором семестре – контрольные работы 7, 8 и 9. При этом необходимо соблюдать следующие правила:

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4 – 5 см для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради указываются фамилия студента, его инициалы, учебный шифр, название дисциплины, номер контрольной работы, а также название учебного заведения, дата представления работы в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. В работу включаются все задачи, указанные в задании, строго по варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, считаются незачтенными.

4. Решение задач располагаются в порядке возрастания их номеров.

5. Перед решением каждой задачи записывается ее условие. В том случае, если несколько задач, из числа которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера. Например, условие задачи 27 должно быть переписано так:

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' = 6x^2 + 1.$$

6. Решения излагаются подробно и аккуратно, с объяснением и мотивировкой всех действий, с необходимыми чертежами.

7. После получения прорецензированной работы, как зачтенной, так и незачтенной, студент должен исправить отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решения те или иные исправления или дополнения и прислать работу для повторной проверки, то это следует сделать в наиболее короткий срок. Все исправления и дополнения выполняются в той же тетради, но вносить их в сам текст после рецензирования запрещается. Поэтому рекомендуется при первоначальном выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться исправлением решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

8. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранить. Без их предоставления студент не допускается к сдаче устного зачета по контрольной работе. После сдачи устного зачета (защиты) по каждой контрольной студент допускается к сдаче экзамена за курс.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, задача Коши. Теорема существования и единственности задачи Коши.

Типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения и уравнения Бернулли.

Дифференциальные уравнения второго и высших порядков. Общее и частные решения. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения. Фундаментальная система решений однородного уравнения, характеристическое уравнение.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.

Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения

Тема 8. Теория рядов.

Числовые ряды: основные определения и свойства сходящихся рядов.

Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Достаточные признаки сходимости: признаки сравнения рядов, признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.

Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Степенные ряды, теорема Абеля, радиус и интервал сходимости, их нахождение. Свойства абсолютно сходящихся рядов, почленное дифференцирование и интегрирование.

Ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора. Ряды Маклорена для элементарных функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\arctg x$ и их интервалы сходимости.

Применение степенных рядов для вычисления значений функций, определенных интегралов и решения дифференциальных уравнений.

Тема 9. Теория вероятностей и математическая статистика.

Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения.

Пространство элементарных событий, алгебра событий.

Аксиоматическое, классическое, геометрическое и статистическое определения вероятности. Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.

Зависимые и независимые случайные события. Условная вероятность, формула умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса.

Последовательность независимых испытаний, формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Случайные величины, действия над ними. Дискретная случайная величина и закон ее распределения. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства.

Распределения случайных величин: биномиальное, Пуассона, равномерное, нормальное.

Нормальное распределение. Независимые случайные величины, законы больших чисел.

Элементы математической статистики. Выборка, вариационные ряды, полигон и гистограмма. Точечные оценки параметров распределения, понятия состоятельности и несмещенности оценки, доверительные интервалы. Оценки математического ожидания и дисперсии.

Статистические гипотезы и критерии значимости. Стохастические зависимости случайных величин, их нахождение. Метод наименьших квадратов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Ниже приведены таблицы номеров задач, входящих в задания (контрольные работы). Студент должен выполнять контрольные работы по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного шифра (см. таблицу 1). Так, например, контрольная работа 7 варианта 5 согласно таблице 1 должна содержать решения задач 5, 15, 25, 35.

На стр. 13 приведен список литературы, рекомендованный при изучении данного курса.

Таблица 1

№ва- рианта	Контрольные работы										
	7				8			9			
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №7

1-10. Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $x^2y' = 2xy - 3;$ $y(-1) = 1.$
2. $2xyy' + x^2 = y^2;$ $y(1) = 0.$
3. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$ $y(0) = 0.$
4. $(1 + e^x)yy' = e^x;$ $y(0) = 1.$
5. $xy^2 + x + y(x^2 - 1)y' = 0;$ $y(0) = 1.$
6. $x^2 - 3y^2 + 2xyy' = 0;$ $y(2) = 1.$
7. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x};$ $y(-1) = 1.$
8. $y' + y = 2x;$ $y(0) = -1.$
9. $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right);$ $y(1) = e.$
10. $y' - \frac{x}{x^2+1} \cdot y = x;$ $y(0) = 0.$

11-20. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

11. $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x.$
12. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3.$
13. $y'' + 4y = e^{2x}.$
14. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}.$
15. $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x.$
16. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^x.$
17. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1.$
18. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5.$
19. $y'' - 2y' + y = 16e^x.$
20. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}.$

21-30. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

21. $\begin{cases} x'_t = -3x - y, \\ y'_t = x - y. \end{cases}$
22. $\begin{cases} x'_t = -7x + y, \\ y'_t = -5y - 2x. \end{cases}$
23. $\begin{cases} x'_t = 2x - 9y, \\ y'_t = x + 8y. \end{cases}$
24. $\begin{cases} x'_t = 2x + y, \\ y'_t = 3x + 4y. \end{cases}$
25. $\begin{cases} x'_t = x - 3y, \\ y'_t = 3x + y. \end{cases}$
26. $\begin{cases} x'_t = y - x, \\ y'_t = -3y - x. \end{cases}$
27. $\begin{cases} x'_t = x - 2y, \\ y'_t = 3x + 6y. \end{cases}$
28. $\begin{cases} x'_t = 3x + 2y, \\ y'_t = x + 2y. \end{cases}$
29. $\begin{cases} x'_t = -3x + 2y, \\ y'_t = -2x + y. \end{cases}$
30. $\begin{cases} x'_t = x - 5y, \\ y'_t = x - y. \end{cases}$

31. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой T тела и температурой воздуха T_0 . Если температура воздуха равна 20°C и тело в течение 20 минут

охлаждается от 100°C до 60°C , то через сколько времени его температура понизится до 30°C ? ($T(t)$ — температура тела, $\frac{dT}{dt}$ — скорость охлаждения).

32. Кривая проходит через точку $A(1; 2)$ и обладает тем свойством, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке на сумму координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. Найти уравнение кривой.

33. Определить путь S , пройденный телом за время t , если его скорость пропорциональна пройденному пути и, если тело проходит 100 м за 10 секунд и 200 м за 15 секунд.

34. Кривая проходит через точку $A(2; -1)$ и обладает тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.

35. Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 3 оборота в секунду, через 1 минуту вращается с угловой скоростью 2 оборота в секунду. Какова будет его угловая скорость через 3 минуты после начала вращения, если сила трения, замедляющая движение диска, вращающегося в жидкости, пропорциональна угловой скорости вращения ($F_{\text{дв.}} = -F_{\text{тр.}}$; $F_{\text{тр.}} = k \cdot \omega$).

36. Кривая проходит через точку $A(1; 2)$ и обладает тем свойством, что отношение ординаты любой ее точки к абсциссе пропорционально угловому коэффициенту касательной к этой кривой, проведенной в той же точке, с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.

37. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 16 м/с, скорость его через 5 секунд станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с? ($F_{\text{дв.}} = -F_{\text{сопр.}}$; $F_{\text{сопр.}} = k \cdot V$).

38. Кривая проходит через точку $A(1; 5)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен утроенной абсциссе точки касания. Найти уравнение кривой (воспользоваться уравнением касательной).

39. Материальная точка массы m притягивается неподвижной точкой A с силой, пропорциональной массе m и расстоянию x от точки A ; при этом коэффициент пропорциональности равен a^2 . Найти закон движения ($F_{\text{дв.}} = -F_{\text{притяж.}}$; $F_{\text{притяж.}} = a^2 mx$).

40. Кривая проходит через точку $A(2; 4)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точек касания. Найти уравнение кривой

(воспользоваться уравнением касательной).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №8

41-50. Исследовать на условную и абсолютную сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$41. u_n = (-1)^n \frac{n}{n^3+3}.$$

$$43. u_n = (-1)^n \frac{n}{10n^2-1}.$$

$$45. u_n = (-1)^n \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}.$$

$$47. u_n = \frac{\cos n}{n^2 \sqrt{n}}.$$

$$49. u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$42. u_n = (-1)^n \frac{n^2}{5^n}.$$

$$44. u_n = (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n.$$

$$46. u_n = (-1)^n \frac{n}{n^3+2}.$$

$$48. u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln^n(1+n)}.$$

$$50. u_n = \frac{\sin n}{n^{10}}.$$

51-60. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, исследовать сходимость ряда на концах интервала.

$$51. a_n = \frac{1}{2^n(4n-3)}.$$

$$53. a_n = \frac{5^n}{n+1}.$$

$$55. a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

$$57. a_n = \frac{1}{3^n(n^2+1)}.$$

$$59. a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{4^n}}.$$

$$52. a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$54. a_n = \frac{1}{n \cdot 10^n}.$$

$$56. a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$58. a_n = \frac{1}{n^3}.$$

$$60. a_n = \frac{1}{7^n(3n+1)}.$$

61-70. Вычислить определенный интеграл $\int_0^b f(x) dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд, используя известные разложения функций в ряд Маклорена, и проинтегрировав ряд почленно.

$$61. f(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}, \quad b = 1.$$

$$63. f(x) = x \ln(1-x^2), \quad b = 0,5.$$

$$65. f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x, \quad b = 0,5.$$

$$67. f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad b = 0,5.$$

$$69. f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}, \quad b = 0,5.$$

$$62. f(x) = \cos \sqrt{x}, \quad b = 1.$$

$$64. f(x) = x e^{-x}, \quad b = 0,5.$$

$$66. f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, \quad b = 0,5.$$

$$68. f(x) = \sin x^2, \quad b = 1.$$

$$70. f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad b = 0,5.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №9

71. Из восьми билетов выигрышными являются два. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу четырех билетов один выигрышный.

72. Из десяти электрических лампочек три неисправны. Найти вероятность того, что наугад извлеченные две лампочки будут исправными.

73. В первом ящике находятся шары с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Во втором ящике — с номерами 6, 7, 8, 9, 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятность того, что сумма номеров равна 11.

74. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлек три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

75. Внутри круга радиуса r наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

76. В группе 12 студентов, среди которых 8 успевающих. Наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять успевающих.

77. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. Найти вероятность того, что среди отобранных шести лиц окажутся две женщины.

78. 10 человек случайным образом садятся за стол. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

79. В ящике 20 деталей, из них 4 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.

80. Внутри круга радиуса r наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

81. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит два вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) оба вопроса билета; б) только один вопрос билета.

82. В каждой из двух урн находится 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется черным.

83. Три стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первым стрелком равна 0,9; вторым - 0,8; третьим - 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попал в мишень; б) только два стрелка попали в мишень; в) все три стрелка попали в мишень.

84. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

85. В партии из 20 деталей 12 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных трех деталей хотя бы одна стандартна.

86. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

87. Монета подбрасывается 6 раз. Найти вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше трех раз.

88. В урне 16 шаров. Вероятность вытаскивания из урны двух черных шаров равна $\frac{1}{20}$. Сколько в урне черных шаров?

89. Среди облигаций займа 25% выигрышных. Найти вероятность того, что из трех взятых облигаций: а) все облигации выиграют; б) хотя бы одна облигация выиграет.

90. В лаборатории имеются 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время работы автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

91-100. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

$$231. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$92. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{x^2-x}{2}, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$93. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^3, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$94. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \leq \frac{1}{3}; \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$95. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ \frac{x}{2} - 1, & 2 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$96. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$97. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$98. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$99. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases} \quad 100. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

101-110. Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице:

x	1	2	3	4	5
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y = aX + b$, выражающую приближенно (аппроксимирующую) функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $Y = aX + b$.

101.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

102.

x	1	2	3	4	5
y	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5

103.

x	1	2	3	4	5
y	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7

104.

x	1	2	3	4	5
y	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9

105.

x	1	2	3	4	5
y	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

106.

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

107.

x	1	2	3	4	5
y	5,2	6,2	4,7	2,7	3,2

108.

x	1	2	3	4	5
y	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5

109.

x	1	2	3	4	5
y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

110.

x	1	2	3	4	5
y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т., Т. 2. М.: Наука, 1970 – 1985. – 632 с.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ Под редакцией Б.П. Демидовича.– М.: Наука, 1964 – 1978.– 472 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.– М.:Наука, 1981.– 448 с.
4. Санников В.Ф. Ряды. Методические указания к лекционному курсу// КИСИ.- Красноярск, 1992.– 51 с.
5. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики.– М.: Высш. шк., 1971.– 328 с.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.– М.: Высш. шк., 1979.– 400 с.
7. Иванова В.М. Математическая статистика.– М.: Высшая. шк., 1981.– 371 с.
8. Андреев Н.П., Санников В.Ф. Уравнения математической физики. Учеб.пособие// КИСИ.– Красноярск, 1995.– 90 с.
9. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.– М.: Наука, 1967.– 304 с.
10. Загибалов В.И., Попов М.Т. Функции комплексного переменного. Методические указания к решению задач.: в 2 ч. Часть 1,2// КПИ.– Красноярск, 1980 – 1981.– 55 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие указания	3
Рабочая программа	4
Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	4
Тема 2. Теория рядов	4
Тема 3. Теория вероятностей и математическая статистика	5
Контрольные задания	6
Контрольная работа №7	7
Контрольная работа №8	9
Контрольная работа №9	10
Библиографический список	13