МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 4

Краткие теоретические сведения

Производной функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\bar{s}$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ (т. е. $M \to M_0$) и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{s}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{s}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}.$$

Если функция $u = f(x, y)$ имеет в точке M_0 непрерывные частные производные, то в этой точке существует производная по любому направлению из M_0, которая вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\beta ,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\bar{s}|}$ и $\cos\beta = \dfrac{y}{|\bar{s}|}$ - направляющие косинусы вектора $\bar{s} = x\bar{i} + y\bar{j}$.

Градиентом функции $u = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке *M*, координаты которого равны значениям соответствующих частных производных в точке *M*:

$$\overline{grad}\ f(M) = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M ; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M \right).$$

Градиент показывает направление наибольшего возрастания значений функции. Для функции $u = f(x, y)$ градиент $\overline{grad}\ f(M_0)$ перпендикулярен линии уровня, проходящей через точку M_0.

Значение $f(x_0)$ называется максимумом (минимумом) функции *n* переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$, если оно является наибольшим (наименьшим)в некоторой окрестности точки x_0, т. е. в этой окрестности выполняется неравенство $f(M) \le f(x_0)$(для минимума $f(M) \ge f(x_0)$). Точка x_0 называется точкой максимума (точкой минимума).

Максимумы и минимумы функции называются экстремумами функции.

Точка x_0 называется критической точкой функции $f(x)$, если все частные производные равны нулю или какая – нибудь из них не существует.

Точка x_0 называется стационарной точкой функции $f(x)$, если она является внутренней точкой области определения и все частные производные в ней равны нулю.

Необходимое условие экстремума функции: Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум во внутренней точке x_0 области определения функции. Тогда в точке x_0 значения всех частных производных первого порядка равны нулю:

$$f'_{x_1}(x_0)=0,\ldots,\ f'_{x_n}(x_0)=0.$$

Достаточное условие экстремума функции двух переменных: Пусть в критической точке $M(x_0;y_0)$ частные производные первого порядка равны нулю: $f'_x(x_0)=0$, $f'_y(x_0)=0$. Обозначим через Δ число

$$\Delta = AB - C^2,$$

где $A=f''_{xx}(x_0)$, $B=f''_{yy}(x_0)$, $C=f''_{xy}(x_0)$:

1. Если $\Delta>0$, то в точке x_0 функция $f\left(x,y\right)$ имеет локальный экстремум, причем если $A<0$, то локальный максимум, а если $A>0$, то локальный минимум.
2. Если $\Delta<0$, то в точке x_0 функция $f\left(x,y\right)$ не имеет экстремума.
3. Если $\Delta=0$, то вопрос о наличии экстремума в точке x_0 остается открытым.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции $f=c_1x+c_2y$ в области *D*, заданной системой линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1x+b_1y\le c_1, \\ \ldots \\ a_mx+b_my\le c_m, \\ x\ge 0,\ y\ge 0. \end{cases}$$

Для линейной функции двух переменных нет критических точек внутри области *D*, тогда линейная функция принимает наибольшее и наименьшее значения только на границе области.

Решением линейного неравенства с двумя неизвестными $a\ x+b\ y\le c$ называется множество пар значений (x,y), которые при подстановке в неравенство обращают его в верное неравенство.

Множество решений линейного неравенства образуют на координатной плоскости *XOY* полуплоскость вместе с граничной прямой.

Для построения полуплоскости, заданной неравенством $a\ x+b\ y\le c$, надо:

- построить на плоскости граничную прямую $a\ x+b\ y=c$
- из двух полуплоскостей, на которые координатную плоскость делит эта прямая, выбрать ту полуплоскость, в которой координаты любой точки $M_0(x_0,y_0)$, не лежащей на граничной прямой, удовлетворяют заданному неравенству.

Решением системы m линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \le c_1, \\ \dots \\ a_mx + b_my \le c_m. \end{cases}$$

называется множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют одновременно всем неравенствам – это пересечение всех полуплоскостей, соответствующих m неравенствам.

Если придать функции f произвольное фиксированное значение f_0, то тогда уравнение $f_0 = c_1x + c_2y$ определяет на плоскости прямую линию, которая является линией уровня функции f. Для функции $f = c_1x + c_2y$ градиентом является вектор $\overline{grad}\ f = (c_1;\, c_2) = \bar{c}$, координатами которого служат коэффициенты при переменных в целевой функции.

Параллельным переносом прямой $f = f_0$ в направлении вектора $\bar{c} = (c_1;\, c_2)$ находится точка «входа» в область, в которой целевая функция f достигает наименьшего значения, и точку «выхода» из области, в которой f достигает наибольшего значения.

В ходе исследования предполагается, что вид функциональной зависимости известен, требуется определить только параметры этой зависимости. Результаты исследования сведены в таблицу:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Требуется по табличным данным получить функциональную зависимость.

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров a и b из условия минимума суммы квадратов отклонений Δ_i, наблюдаемых значений y_i от значений предполагаемой функции во всех экспериментальных точках x_i:

- для линейной зависимости $y = ax + b$ –

$$\varphi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} \left[(ax_i + b) - y_i\right]^2 \to \min .$$

Тогда из условий $\dfrac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$ получаются формулы для определения коэффициентов a и b линейной зависимости:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\,; \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Решение типовых задач

1. Показать, что функция $z = \sin(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Решение.

Находим частную производную первого порядка по x, считая, что y постоянная :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2).$$

Использовали формулу производной сложной функции

$$(\sin\ u)' = \cos\ u \cdot u'.$$

Находим частную производную первого порядка по y, считая, что x постоянная:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2).$$

Использовали формулу производной сложной функции

$$(\sin\ u)' = \cos\ u \cdot u'.$$

Находим частную производную второго порядка по y от

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2),$$

Считая, что x постоянная:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2).$$

Использовали правило нахождения производной произведения

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

и формулу производной сложной функции

$$(\cos\ u)' = \sin u \cdot u'.$$

Находим частную производную второго порядка по y от

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2),$$

Считая, что x постоянная:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy \sin(x^2 + y^2)$$

Подставив $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$, получим тождество

$$2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)+\frac{y}{x}\;4xy\sin(x^2+y^2)=\frac{1}{y}\,2y\cos(x^2+y^2),$$

$$2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)+\;4y^2\sin(x^2+y^2)=2\cos(x^2+y^2),$$

$$2\cos(x^2+y^2)=2\cos(x^2+y^2),$$

$$0=0.$$

Значит, функция $z=\sin(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

т. е. функция $z=\sin(x^2+y^2)$ является корнем уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

2. Вычислить производную функции $u=x^2+xy^2$ в точке $M(1;2)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где $M_1(3;0)$.

Решение.

Найдем единичный вектор $\bar{s}$, имеющий данное направление:

$$\bar{s}=\overline{MM_1}(x_1-x;y_1-y),$$

где x_1,y_1 и x,y - координаты точек M_1 и M соответственно.

$$\bar{s}=\overline{MM_1}(3-1;0-2)=\overline{MM_1}(2;-2).$$

Определим направляющие косинусы вектора $\bar{s}=2\bar{i}-2\bar{j}$, для чего найдем модуль вектора $\bar{s}$:

$$|\bar{s}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{s}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \cos\beta=\frac{y}{|\bar{s}|}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вычислим частные производные функции $u=x^2+xy^2$ в точке $M(1;2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(x^2+xy^2)'_x=2x+y^2,\;\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;2)}=2\cdot 1+2^2=2+4=6.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2+xy^2)'_y=2xy,\;\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;2)}=2\cdot 1\cdot 2=4.$$

Получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{s}}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Таким образом, производная функции $u = x^2 + xy^2$ в точке $M(1;2)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$ равна $\sqrt{2}$.

Так как $\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{s}}\right)_A > 0$, то функция

$$u = x^2 + xy^2$$

возрастает по направлению вектора $\bar{s} = 2\bar{i} - 2\bar{j}$.

3. Найти градиент функции $z = y^2 + xy + x$ в точке $A(2;1)$ и наибольшую скорость изменения функции в этой точке.

Решение.

Для нахождения градиента функции воспользуемся формулой

$$\overrightarrow{grad}\ z(A) = \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A ; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A\right\}$$

Находим частную производную первого порядка по x, считая, что y - постоянная:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 1.$$

Её значение в точке A (2; 1) равно

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = (y+1)_{(2;1)} = 1 + 1 = 2.$$

Находим частную производную первого порядка по y, считая, что x - постоянная:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x.$$

Её значение в точке A (2; 1) равно

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = (2y + x)_{(2;1)} = 2 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Следовательно, градиент функции

$$z = 3x^2 y + 2xy^2 + xy$$

в точке A (2; 1) равен $(2; 4)$, т. е. $\overrightarrow{grad}\ z(A) = (2; 4)$.

Наибольшую скорость изменения функции $z = 3x^2 y + 2xy^2 + xy$ в точке A (2; 1) найдем по формуле $\left|\overrightarrow{grad}\ z\left(A\right)\right| = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A\right)^2}$

$$\left|\overrightarrow{grad}\ z\left(A\right)\right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

4. Исследовать функцию $f(x; y) = x^3 + y^3 + 9xy$ на экстремум.

Решение.

Критические точки (возможного экстремума) функции двух переменных находятся из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

(необходимое условие экстремума функции). Найдем частные производные первого и второго порядка:

$f'_x(x; y) = 3x^2 + 9y$, $f'_y(x; y) = 3y^2 + 9x$,

$f''_{xx}(x; y) = 6x$, $f''_{xy}(x; y) = 9$, $f''_{yy}(x; y) = 6y$.

Для нахождения точек возможного экстремума решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0, \\ 3y^2 + 9x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y = 0, \\ y^2 + 3x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ 3\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 9x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ \frac{1}{3}x^4 + 9x = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ x^4 + 27x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ x \cdot \left(x^3 + 27\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ x^3 + 27 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ x^3 = -27. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3, \\ x = -3. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, получили две критические точки $M_1(-3; -3)$ и $M_2(0; 0)$. Исследуем каждую из полученных точек на экстремум, используя достаточное условие экстремума:

а) для точки $M_1(-3; -3)$ получим:

$A = f''_{xx}(M_1) = f''_{xx}(-3,-3) = 6x\big|_{(-3;-3)} = 6 \cdot (-3) = -18,$

$B = f''_{yy}(M_1) = f''_{yy}(-3,-3) = 6y\big|_{(-3;-3)} = 6 \cdot (-3) = -18,$

$C = f''_{xy}(M_1) = 9.$

$\Delta = AB - C^2 = (-18)\cdot(-18) - 9^2 = 324 - 81 = 243$, так как $\Delta > 0$, то функция имеет экстремум в точке $M_1(-3;-3)$, а именно – максимум, т. к. $A < 0$ (достаточное условие экстремума).

б) для точки $M_2(0;0)$ получим:

$A = f''_{xx}(M_2) = f''_{xx}(0,0) = 6x\big|_{(0;0)} = 6\cdot 0 = 0,$

$B = f''_{yy}(M_2) = f''_{yy}(0,0) = 6y\big|_{(0;0)} = 6\cdot 0 = 0,$

$C = f''_{xy}(M_2) = 9.$

$\Delta = AB - C^2 = 0\cdot 0 - 9^2 = 0 - 81 = -81$, так как $\Delta < 0$, то функция не имеет экстремума в точке $M_2(0;0)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения линейной функции $z = 2x + 2y + 1$ в области решений системы линейных неравенств

$$\begin{cases} 4x - 2y \le 6, \\ 6x + 3y \le 12, \\ -x + 2y \le 2, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

Построим область решений системы неравенств, для чего построим граничные прямые. В качестве контрольной точки возьмем $(0;0)$.

$l_1: \quad 4x - 2y = 6 \Rightarrow 2y = 4x - 6 \Rightarrow y = 2x - 3; \quad (0;-3), \quad (2;1)$

($4\cdot 0 - 2\cdot 0 \le 6 -$ неравенство верное, полуплоскость обращена в сторону точки $(0;0)$).

$l_2: \quad 6x + 3y = 12 \Rightarrow 3y = 12 - 6x \Rightarrow y = 4 - 2x; \quad (2;0), \quad (0;4)$

($6\cdot 0 + 3\cdot 0 \le 12 -$ неравенство верное, полуплоскость обращена в сторону точки $(0;0)$).

$l_3: \quad -x + 2y = 2 \Rightarrow 2y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1; \quad (0;1), \quad (2;2)$

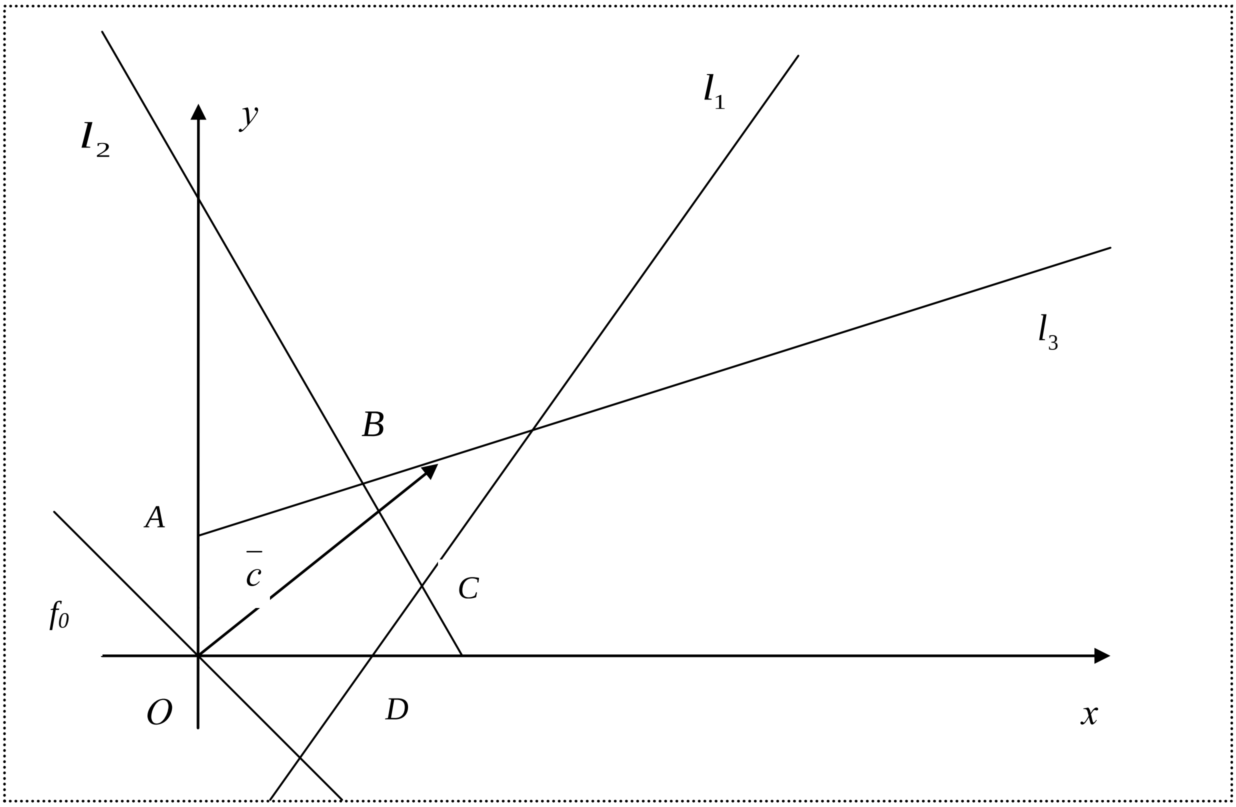
($-1\cdot 0 + 2\cdot 0 \le 2 -$ неравенство верное, полуплоскость обращена в сторону точки $(0;0)$).

Областью решений системы является многоугольник *OABCD*, с учетом что $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Для функции $z = 2x + 2y + 1$ линиями уровня является семейство параллельных прямых $2x + 2y + 1 = const$.

Градиент функции $z = 2x + 2y + 1$ - это вектор, координаты которого есть частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\overrightarrow{grad}\, z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (2;\, 2)$$



f_0 – линия уровня, $f_0 \perp \bar{c}$. Значение функции возрастает в направлении вектора $\vec{c} = (2;\, 2)$, параллельным движением линии уровня f_0 получаем, что O (0; 0) - точка «входа» в область, в которой функция принимает наименьшее значение, B (x; y) - точка «выхода» из области, в которой функция принимает наибольшее значение.

Определим координаты точки B (x; y) ($B = l_3 \cap l_2$):

$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ y = \dfrac{1}{2}x + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 4 - 2x = \dfrac{1}{2}x + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 3 = \dfrac{5}{2}x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ x = \dfrac{6}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{5}, \\ x = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

B(1,2 ; 1,6), A (0; 0).

Вычислим значения функции $z = 2x + 2y + 1$ в точках A (0; 0) и B(1,2 ; 1,6).

$z_{наим.} = z(A) = z(0;0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3.$

$z_{наиб.} = z(B) = z(1{,}2;1{,}6) = 2 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}6 + 1 = 2{,}4 + 3{,}2 + 1 = 6{,}6.$

Следовательно,

$$z_{наим.} = 3, \;\; z_{наиб.} = 6{,}6.$$

6. В ходе исследования покупательского спроса получена таблица, где x - цена товара (ден. ед.), y – количество товара (усл. ед.). Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида $y = ax + b$, используя метод наименьших квадратов. Построить график полученной зависимости.

x	16	17	17	19	20	21
y	53	55	54	56	53	57

Решение.

Составим таблицу для вычисления нужных сумм в системе уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\,; \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

для определения коэффициентов a и b линейной зависимости.

n	x_i	y_i	$x_i^{\,2}$	$x_i \cdot y_i$
1	16	53	256	848
2	17	55	289	935
3	18	54	324	972
4	19	56	361	1064
5	20	58	400	1160
6	21	57	441	1197
$\sum_{i=1}^{n}$	111	333	2071	6176

Система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 2071a + 111b = 6176, \\ 111a + 6b = 333. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2071 & 111 \\ 111 & 6 \end{vmatrix} = 12426 - 12321 = 105\,;$$

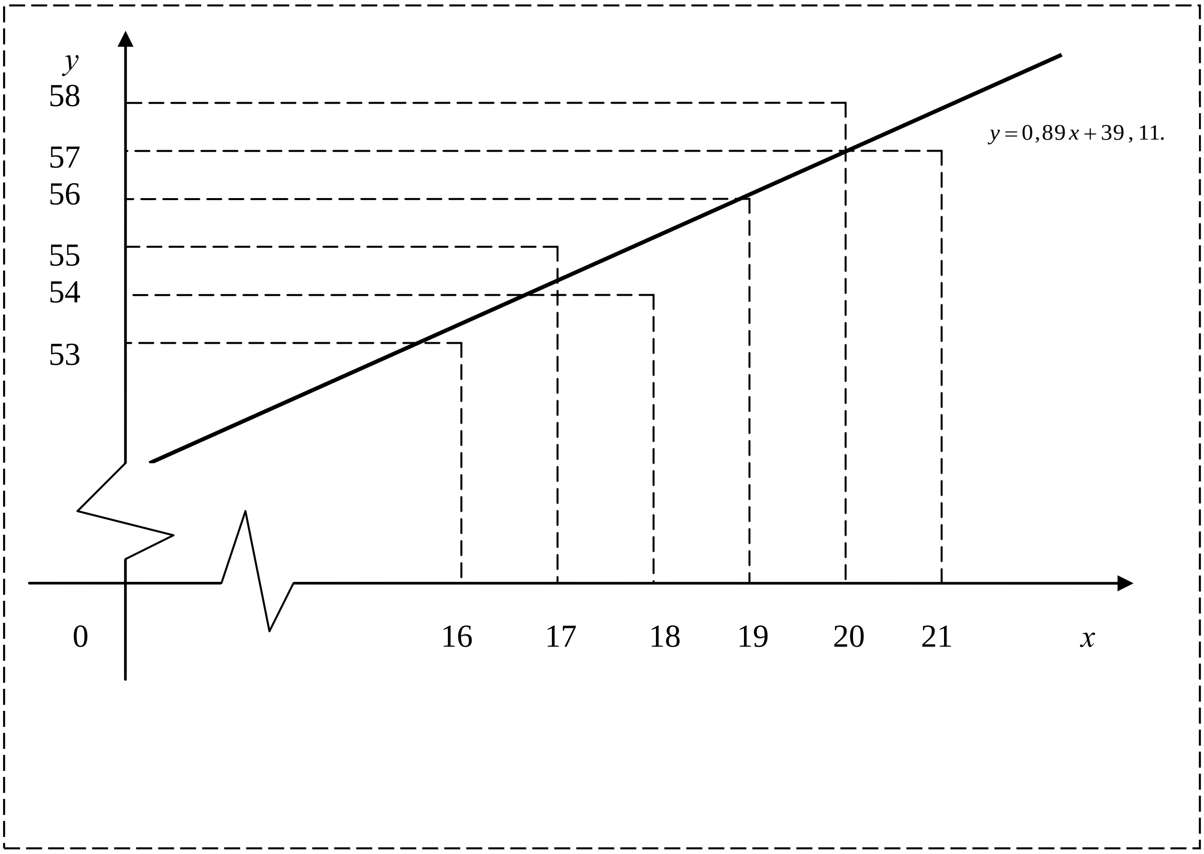
$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 6176 & 111 \\ 333 & 6 \end{vmatrix} = 37056 - 36963 = 93\,;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 2071 & 6176 \\ 111 & 333 \end{vmatrix} = 689643 - 685536 = 4107\,.$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{93}{105} \approx 0{,}89; \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}\frac{4107}{105} \approx 39{,}11.$$

Линейная зависимость имеет вид $y = 0{,}89x + 39{,}11$.

Построим сначала экспериментальные точки, а затем график прямой $y = 0{,}89x + 39{,}11$ по двум точкам (19; 56,02), (21; 57,8).



y
58
57
56
55
54
53
$y = 0,89x + 39,11.$
0
16
17
18
19
20
21
x