МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 5,6

Краткие теоретические сведения

Функция $F(x)$, производная от которой равна данной функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, называется первообразной функцией функции $f(x)$.

Общее выражение $F(x)+C$ совокупности всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$ или $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$
2. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$ или $\int dF(x)\,dx = F(x) + C$
3. $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ ($k -$ const)
4. $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \int f_3(x)\,dx$
5. $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad при \;\; n \neq -1$	6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$
1*. $\int dx = x + C$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	8. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	8*. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$
3*. $\int e^x dx = e^x + C$	9. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos dx = \sin x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + C$

Метод замены переменной

$$\int f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int F(t)\,dt$$

Формула интегрирования по частям

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$ таких, что $\max\Delta x_i \to 0$ и при любом выборе ξ_i на отрезках $[x_{i-1};x_i]$ интегральная сумма стремится к одному и тому же пределу, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$

2. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$

4. $\int\limits_a^b [f_1(x)\,dx \pm f_2(x)\,dx \pm f_3(x)\,dx] = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_3(x)\,dx$

5. $\int\limits_a^b c\,f(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Вычисление площадей плоских фигур

Криволинейная трапеция, ограниченная $y=f(x), (f(x)\ge 0),\ x=a, x=b,\ y=0.$	$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$
Криволинейная трапеция, ограниченная $y=f(x), (f(x)\le 0),\ x=a, x=b,\ y=0.$	$S=-\int\limits_a^b f(x)\,dx$
Криволинейная трапеция, ограниченная $x=\varphi(y), (\varphi(y)\ge 0),\ y=c, y=d,\ x=0.$	$S=\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy$

Криволинейная трапеция, ограниченная $x=\varphi\ (y),(\varphi(y)\le 0),\ y=c,\ y=d,\ x=0.$	$S=-\int\limits_c^d \varphi(y)\,d\,y$
Фигура, ограниченная $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $(f_1(x)\ge f_2(x))$, $x=a,\ x=b$.	$S=\int\limits_a^b (f_1(x)-f_2(x))d\,x$
Фигура, ограниченная $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $(\varphi_1(y)\ge\varphi_2(y))$, $y=c,\ y=d$.	$S=\int\limits_c^d (\varphi_1(y)-\varphi_2(y))d\,y$
Криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho=\rho\ (\varphi)$ и лучами $\varphi=a,\ \varphi=b$.	$S=\dfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\,\varphi$

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования или от функций, имеющих бесконечные разрывы на интервале интегрирования, называются несобственными интегралами.

Несобственные интегралы от непрерывной функции $f(x)$ по бесконечному интервалу $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$ или $(-\infty;+\infty)$ (несобственные интегралы I рода) интегрирования определяются посредством предельного перехода:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)d\,x=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)d\,x,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)d\,x=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)d\,x,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)d\,x=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)d\,x+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)d\,x,$$

где c – произвольное действительное число.

Несобственные интегралы от функций, имеющих бесконечные разрывы на конечном отрезке интегрирования (несобственные интегралы II рода) также определяются посредством предельного перехода:

если функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, $c\in[a;b]$, и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то

$$\int\limits_a^b f(x)d\,x=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)d\,x+\lim_{\lambda\to0}\int\limits_{c+\lambda}^{b} f(x)d\,x.$$

Комплексными числами называются выражения вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, $i^2=-1$

Комплексные числа $z=a+bi$ и $\bar z=a-bi$, отличающиеся знаком мнимой части, называются сопряженными.

Действия над комплексными числами:

- сложение – $(a+bi)+(c+d\,i)=a+c+(b+d)i$;
- умножение –$(a+bi)\cdot(c+d\,i)=ac-bd+(ad+bc)i$;
- деление – $\dfrac{a+bi}{c+d\,i}=\dfrac{(a+bi)\cdot(c-d\,i)}{(c+d\,i)\cdot(c-d\,i)}=\dfrac{ac+bd+(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2}$.

$z = a + bi$ – алгебраическая форма записи комплексного числа

Модуль $r = |z|$ и аргумент $\varphi = \arg z$ комплексного числа $z = a + bi$ связаны с его компонентами при помощи формул

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Решение типовых примеров

1. Найти неопределенный интеграл $\int\left(x^4 + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \sqrt{x} + 3\right)dx$, результат проверить дифференцированием.

Решение.

Используем непосредственное интегрирование

$$\int\left(x^4 + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \sqrt{x} + 3\right)dx = \int\left(x^4 + 4\cdot x^{-\frac{1}{4}} - \cdot x^{\frac{1}{2}} + 3\right)dx = \frac{x^5}{5} + 4\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\cdot x + C =$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{16}{3}\cdot x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + 3\cdot x + C = \frac{1}{5}x^5 + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + C$$

Использовали свойства 3,4 неопределенного интеграла и формулу интегрирования (1) таблицы основных интегралов.

Проверка:

$$\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + C\right)' = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{16}{3}\cdot x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + 3\cdot x + C\right)' =$$

$$\frac{1}{5}\cdot 5\cdot x^4 + \frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} + 3 + 0 = x^4 + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \sqrt{x} + 3.$$

2. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$, результат проверить дифференцированием.

Решение.

$$\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} t = ctg\,x, \\ dt = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{matrix} \right| = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{ctg\,x} + C.$$

Использовали замену переменной и формулу интегрирования (3*) таблицы основных интегралов.

Проверка:

$$\left(-e^{ctg\,x} + C\right)' = -e^{ctg\,x} \cdot \left(ctg\,x\right)' + 0 = -e^{ctg\,x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{e^{ctg\,x}}{\sin^2 x}.$$

3. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{12x-36}{x^4 - x^3 - 6x^2}dx$.

Решение.

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби. Выпишем знаменатель дроби и разложим его на простейшие действительные множители:

$$x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2\left(x^2 - x - 6\right) = x^2(x-3)(x+2).$$

Составим схему разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби:

$$\frac{12x-36}{x^4 - x^3 - 6x^2} = \frac{12x-36}{x^2(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+2}.$$

Освободимся от знаменателей, для чего умножим обе части равенства

$$\frac{12x-36}{x^2(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+2}$$

на $x^2(x-3)(x+2)$ и получим:

$$12x - 36 = A\cdot\left(x^3 - x^2 - 6x\right) + B\cdot\left(x^2 - x - 6\right) + C\cdot\left(x^3 + 2x^2\right) + D\cdot\left(x^3 - 3x^2\right);$$

$$12x - 36 = Ax^3 - Ax^2 - 6Ax + Bx^2 - Bx - 6B + Cx^3 + 2Cx^2 + Dx^3 - 3Dx^2.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$12x - 36 = (A + C + D)x^3 + (-A + B + 2C - 3D)x^2 + (-6A - B)x - 6B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ -A + B + 2C - 3D = 0, \\ -6A - B = 12, \\ -6B = -36. \end{cases} \quad \begin{cases} -3 + C + D = 0, \\ -3 + 6 + 2C - 3D = 0, \\ -6A = 18, \\ B = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} C = 3 - D, \\ 6 - 2D - 3D = -3, \\ A = -3, \\ B = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \dfrac{6}{5}, \\ D = \dfrac{9}{5}, \\ A = -3, \\ B = 6. \end{cases}$$

Таким образом, правильная рациональная дробь представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{12x-36}{x^4-x^3-6x^2} = -\frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{\frac{6}{5}}{x-3} + \frac{\frac{9}{5}}{x+2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{12x-36}{x^4-x^3-6x^2}dx = \int \left(-\frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{\frac{6}{5}}{x-3} + \frac{\frac{9}{5}}{x+2} \right) dx =$$

$$-3\int \frac{dx}{x} + 6\int \frac{dx}{x^2} + \frac{6}{5}\int \frac{d(x-3)}{x-3} + \frac{9}{5}\int \frac{d(x+2)}{x+2} =$$

$$-3\ln|x| - \frac{6}{x} + \frac{6}{5}\ln|x-3| + \frac{9}{5}\ln|x+2| + C.$$

Использовали формулы интегрирования (1) и (2) таблицы основных интегралов, учитывая, что $dx = d(x-3)$ и $dx = d(x+2)$.

4. Найти неопределенный интеграл $\int (x-5)\cdot e^x dx$.

Решение.

Используем формулу интегрирования по частям: $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = x-5 & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right|$$

$$\int (x-5)\cdot e^x dx = (x-5)\cdot e^x - \int e^x dx = (x-5)\cdot e^x - e^x + C.$$

Использовали формулу интегрирования (3*) таблицы основных интегралов.

5. Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{x^2 dx}{2+\sqrt{x}}$.

Решение.

Используем замену переменной $\sqrt{x} = t, \quad x = t^2, \quad dx = 2t\,dt$.

$$\int \frac{x^2 dx}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{t^4 \cdot 2t\,dt}{2+t} = 2\int \frac{t^5}{2+t}dt = 2\int \left(t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 - \frac{32}{2+t} \right) dt =$$

$$2\int t^4dt-4\int t^3dt+8\int t^2dt-16\int tdt+32\int dt-64\int\frac{dt}{2+t}=2\cdot\frac{t^5}{5}-4\cdot\frac{t^4}{4}+8\cdot\frac{t^3}{3}-16\frac{t^2}{2}+32t-$$

$$64\int\frac{d(2+t)}{2+t}=\frac{2}{5}t^5-t^4+\frac{8}{3}t^3-8t^2+32t-64\ln|2+t|+C=$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-x^2+\frac{8}{3}\sqrt{x^3}-8x+32\sqrt{x}-64\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+C.$$

($\dfrac{t^5}{2+t}=t^4-2t^3+4t^2-8t+16-\dfrac{32}{2+t}$) - выполнили деление многочлена на многочлен.

Использовали формулы интегрирования (1) и (2) таблицы основных интегралов, учитывая, что $dt=d(2+t)$.

6. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_2^3\left(x^4+3x^2+5\right)dx$.

Решение.

$$\int\limits_2^3\left(x^4+3x^2+5\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+x^3+5x\right)\Bigg|_2^3=\frac{3^5}{5}+3^3+5\cdot3-\frac{2^5}{5}-2^3-5\cdot2=$$

$$\frac{243}{5}+27+15-\frac{32}{5}-8-10=\frac{211}{5}+24=66{,}2.$$

Для вычисления соответствующего неопределённого интеграла использовали свойства 3,4 неопределенного интеграла и формулу интегрирования (1) таблицы основных интегралов. Для вычисления определённого интеграла использовали формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a).$$

7. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 2x\ln x\,dx$

Решение.

$$\int\limits_1^2 2x\ln x\,dx=2\int\limits_1^2 x\ln x\,dx=x^2\cdot\ln x\Big|_1^2-2\cdot\int\limits_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=2^2\cdot\ln2-1^2\ln1-$$

$$-\int\limits_1^2 x\,dx=4\ln2-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=4\ln2-\frac{2^2}{2}+\frac{1}{2}=4\ln2-\frac{3}{2}.$$

Для вычисления соответствующего неопределённого интеграла использовали формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$:

$u = \ln x, \quad dv = 2\,x dx,$ тогда $du = \dfrac{dx}{x}, \quad v = x^2$ и формулу интегрирования (1) таблицы основных интегралов.

Для вычисления определённого интеграла использовали формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

8. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_1^{27} \frac{x\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

Для вычисления соответствующего неопределённого интеграла используем замену переменной:

$$\sqrt[3]{x} = t, \;\; x = t^3, \;\; dx = 3t^2 dt, \;\; x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = 1; \;\; x_2 = 27 \Rightarrow t_2 = 3.$$

$$\int_1^{27} \frac{x\,dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int_1^3 \frac{t^3 \cdot 3t^2 dt}{1+t} = 3\int_1^3 \frac{t^5}{1+t} dt = 3\int_1^3 \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt =$$

$$3\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| \right)\Bigg|_1^3 = 3\left(\frac{3^5}{5} - \frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3 - \ln(1+3) \right) -$$

$$3\left(\frac{1^5}{5} - \frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 - \ln(1+1) \right) = 3\left(\frac{243}{5} - \frac{81}{4} + 9 - 4{,}5 + 3 - \ln 4 \right) -$$

$$3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \right) = \frac{729}{5} - \frac{243}{4} + 27 - 13{,}5 + 3 - 3\ln 2^2 - \frac{3}{5} + \frac{3}{4} - 1 +$$

$$1{,}5 - 3 + 3\ln 2 = 99{,}2 - 3\ln 2.$$

Использовали формулу интегрирования (1) таблицы основных интегралов. Для вычисления определённого интеграла использовали формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

9. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_0^{+\infty} e^{3x}\,dx.$$

Решение.

Несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования определяется посредством предельного перехода.

$$\int_0^{+\infty} e^{3x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{\beta} e^{3x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right)\Bigg|_0^{\beta} = \frac{1}{3} \lim_{\beta\to+\infty} \left(e^{3\beta} - e^0 \right) = +\infty.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{3x}\,dx$ расходится.

Использовали формулу интегрирования (3*) таблицы основных интегралов.

10. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad .$$

Решение.

Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, которая лежит на границе отрезка интегрирования [0; 1]. Несобственный интеграл с бесконечным разрывом определяется посредством предельного перехода.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} d(1-x) = -2\sqrt{1-x}\,\Big|_{0}^{1-\varepsilon} =$$

.

$$-2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1-1+\varepsilon} - \sqrt{1-0}\right) = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right) = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon} + 2 = 2 .$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится.

Использовали формулу интегрирования (1) таблицы основных интегралов.

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$ и $y = -x^2 + 4$

Решение.

Плоские кривые (параболы) отнесены к прямоугольной системе координат. Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций с верхними границами соответственно $y = -x^2 + 4$ и $y = x^2 + 2$. Пределы интегрирования определяются по точкам пересечения этих кривых. Определим x_1 и x_2, для чего решим уравнение $x^2 + 2 = -x^2 + 4, \quad 2x^2 = 2, \quad x^2 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$ Площадь фигуры, отнесённой к прямоугольной системе координат, выражается формулой

$$S = \int\limits_{x_1}^{x_2} y dx .$$

$$S=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+4-x^2-2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(-2x^2+2\right)dx=\left(-\frac{2x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$-\frac{2\cdot 1^3}{3}+2\cdot 1+\frac{2\cdot(-1)^3}{3}-2\cdot(-1)=\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}+2=4.$$

Использовали формулу интегрирования (1) таблицы основных интегралов.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=4\cos t,\quad y=3\sin t.$$

Решение.

Плоская кривая (эллипс) отнесена к прямоугольной системе координат и задана параметрическими уравнениями. Оси координат совпадают с осями симметрии эллипса и делят его на четыре равные части, поэтому достаточно найти площадь S_1 четвертой части эллипса, расположенную в первой четверти и полученный результат умножить на 4.

Площадь фигуры, отнесённой к прямоугольной системе координат, выражается формулой

$$S=\int_{x_1}^{x_2} y\,dx,$$

где x изменяется от 0 до 4. Используя параметрические уравнения эллипса, найдём $dx=-4\sin t\,dt$,

если $x_1=0$, то $t_1=\frac{\pi}{2}$

$$(x=4\cos t\Rightarrow 0=4\cos t\Rightarrow cost=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2});$$

если $x_2=4$, то $t_2=0$ $(x=4\cos t\Rightarrow 4=4\cos t\Rightarrow cost=1\Rightarrow t=0)$.

Таким образом

$$S_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3\sin t\cdot(-4\sin t)dt=-12\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt=6\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$6\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-0+\frac{1}{2}\sin 0\right)=6\left(\frac{\pi}{2}-0-0+0\right)=3\pi.$$

Окончательно получаем

$$S=4S_1=4\cdot 3\pi=12\pi.$$

Использовали формулу понижения степени $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, формулы интегрирования (1) и (5) таблицы основных интегралов.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\rho = 2\left(1 - \cos\varphi\right).$$

Решение.

Кардиоида симметрична относительно полярной оси, поэтому достаточно найти площадь половины фигуры, а затем результат умножить на 2. При этом полярный угол φ будет изменяться от 0 до π. Площадь фигуры, отнесённой к полярной системе координат, выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi.$$

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2 d\varphi = \int_0^{\pi} 4(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = 4\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$4\int_0^{\pi} d\varphi - 8\int_0^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi + 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{\pi} - 8\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$4\cdot\pi - 4\cdot 0 - 8\sin\pi + 8\sin 0 + 2\left(\pi + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) = 4\pi + 2\pi = 6\pi.$$

Использовали формулы интегрирования (1*) и (5) таблицы основных интегралов.

14. Дано комплексное число $Z = \dfrac{8}{2 - i\cdot 2\sqrt{3}}$. Требуется:

а) записать число Z в алгебраической и тригонометрической формах;
б) построить число на комплексной плоскости.

Решение.

$z = a + bi$ – алгебраическая форма записи комплексного числа.

Запишем число $Z = \dfrac{8}{2 - i\cdot 2\sqrt{3}}$ в алгебраической форме, для чего домножим числитель 8 и знаменатель $2 - i\cdot 2\sqrt{3}$ на число $2 + i\cdot 2\sqrt{3}$, сопряженное знаменателю.

$$Z = \frac{8}{2 - i\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{8\cdot\left(2 + i\cdot 2\sqrt{3}\right)}{\left(2 - i\cdot 2\sqrt{3}\right)\cdot\left(2 + i\cdot 2\sqrt{3}\right)} = \frac{16 + i\cdot 16\sqrt{3}}{4+12} = \frac{16 + i\cdot 16\sqrt{3}}{16} = 1 + i\sqrt{3}.$$

Следовательно, $z = 1 + \sqrt{3}i$ – алгебраическая форма записи комплексного числа.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Для записи числа $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме необходимо определить r и φ по формулам: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = arctg\,\dfrac{b}{a}$.

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$; $\varphi = arctg\,\dfrac{b}{a} = arctg\,\dfrac{\sqrt{3}}{1} = arctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

Следовательно, $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Построим комплексное число $z = 1 + \sqrt{3}i$ на комплексной плоскости: