Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Сибирский федеральный университет»

МАТЕМАТИКА

(краткий курс основных разделов 1 – го семестра для студентов заочной формы обучения направлений: всех специальностей)

Красноярск, 2013

Составители: А.И. Созутов
Н.М. Сучков
Н.Г. Сучкова
М.В. Янченко
В.М. Синицин

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Матрицы

1.1. Матрицы, действия над ними

Определение 1.1.1. *Матрицей* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *размера* $m \times n$ *называется прямоугольная таблица чисел*

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij}*, называемые элементами матрицы, составляют* m *строк и* n *столбцов. В определении элементы* a_{ij} *снабжены индексами* i *и* j*: первый индекс* i *указывает номер строки матрицы, в которой находится элемент* a_{ij}*, а второй* j *– номер столбца.*

Если матрица состоит из одной строки, то ее называют еще вектором-строкой, а если из одного столбца, – вектором-столбцом.

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет размер 2×4 и состоит из 2-х строк и 4-х столбцов.

Две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Определим действия над матрицами. Матрицы можно *умножать* на *числа*. Для того, чтобы матрицу $A = (a_{ij})$ умножить на число α, нужно каждый элемент a_{ij} матрицы A умножить на это число α. Например, при умножении $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ на -7 имеем: $-7A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ -21 & -14 & 21 \end{pmatrix}$.

Матрицы одинакового размера можно *складывать* и *вычитать*. При этом, если матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ имеют одинаковый размер $m \times n$, то сумма $A + B = C = (c_{ij})$ имеет тот же размер и $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Таким образом, сложение и вычитание матриц определяется поэлементно.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Самая сложная операция – *умножение матриц*. Заметим, что умножение матриц – очень важная операция, в линейных пространствах она соответствует умножению линейных преобразований, задаваемых матрицами.

Определение 1.1.2. *Пусть* $A = (a_{ij})$ – *матрица размера* $m \times n$, $B = (b_{ij})$ – *матрица размера* $n \times k$, *то есть, число столбцов матрицы* A *равно числу строк матрицы* B. *Произведением матрицы* A *на матрицу* B *называется матрица* $C = A \cdot B = (c_{ij})$ *размера* $m \times k$, *элементы которой находятся по следующему правилу: элемент* c_{ij} *матрицы* C *равен сумме попарных произведений элементов* i*-й строки матрицы* A *на соответствующие элементы* j*-го столбца матрицы* B, *то есть,*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Например,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Прежде чем перейти к свойствам операций над матрицами, поясним терминологию, принятую в высшей математике. *Коммутативность* – это *переместительный* закон, *ассоциативность* – *сочетательный* закон и *дистрибутивность* – *распределительный* закон.

Умножение матриц в общем случае не к*оммутативно*, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что для любых матриц A, B и чисел α, β выполняются равенства

$$(\alpha \mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\alpha \mathrm{B}) = \alpha(\mathrm{AB}), (\alpha\beta)\mathrm{A} = \alpha(\beta \mathrm{A}); \tag{1}$$

$$\alpha(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha \mathrm{A} + \alpha \mathrm{B}, (\alpha + \beta)\mathrm{A} = \alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{A}. \tag{2}$$

Теорема 1.1.3. *Сложение матриц коммутативно и ассоциативно, то есть,* $A + B = B + A$ *и* $(A + B) + C = A + (B + C)$ *для любых матриц* A, B, C *одинакового размера.*

Доказательство. Так как сложение матриц определяется поэлементно, то утверждения теоремы есть следствия коммутативности и ассоциативности сложения чисел. Теорема доказана.

Следующая теорема доказывается непосредственной проверкой.

Теорема 1.1.4. *умножение матриц ассоциативно. При этом, если произведения AB и $(AB)C$ матриц A, B и C определены, то произведения BC и $A(BC)$ также определены и выполняется равенство $(AB)C = A(BC)$.*

Умножение матриц дистрибутивно относительно их сложения, то есть, $A(B+C) = AB + AC$ и $(A+B)C = AC + BC$.

Определим еще одну операцию – транспонирование матриц.

Определение 1.1.5. *Транспонировать матрицу $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ размера $m \times n$ означает поменять местами строки и столбцы матрицы A. при этом мы получим транспонированную матрицу A^T размера $n \times m$:*

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Теорема 1.1.6. *Если произведение AB матриц A и B определенно, то справедливо равенство $(AB)^T = B^T A^T$.*

Доказательство. Элемент матрицы $C = (AB)^T$, стоящий на пересечении i-*й* строки и j-*го* столбца, $d_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$. С другой стороны, i-я строка матрицы B^T состоит из элементов $b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni}$, а j-й столбец матрицы A^T- из элементов $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$. Следовательно, элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $B^T A^T$, равен $b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn}$ *и* совпадает с элементом d_{ij}. Теорема доказана.

1.2. Обратная матрица, матричные уравнения

Определение 1.2.1. Матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ *называется квадратной порядка n, если число строк матрицы A равно ее числу столбцов и равно n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы A порядка n называются диагональными. Они составляют главную диагональ матрицы A. Матрица A называется диагональной, если все ее элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю. Среди всех матриц порядка n особыми свойствами обладает так называемая единичная матрица E.*

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; E = (\delta_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойство 1.2.2. Для любых матриц B и C, для которых определены произведения EB и CE, выполняются равенства $EB = B$ и $CE = C$.

Свойство доказывается непосредственной проверкой. Таким образом, единичная матрица E при умножении ведет себя как число 1 при умножении чисел. Для любого числа $a \neq 0$ существует обратное число $\frac{1}{a} = a^{-1}$ такое, что $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. Для некоторых квадратных матриц также существует обратная матрица.

Определение 1.2.3. *Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если выполняется равенство $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.*

Не для всякой квадратной матрицы существует обратная матрица. Например, очевидно, что для нулевой матрицы, все элементы которой нули, не существует обратной матрицы. Также легко убедиться, что если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \text{то } AB = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

и для матрицы A не существует обратной матрицы.

Теорема 1.2.4. *Пусть для квадратной матрицы A существует обратная матрица B и C – произвольные матрицы размеров $n \times m$ и $k \times n$ соответственно. Тогда, матричные уравнения $AX = B$ и $YA = C$ разрешимы и имеют единственные решения, которые можно найти по формулам: $X = A^{-1}B$ и $Y = CA^{-1}$.*

Доказательство. По условиям теоремы для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим уравнение $AX = B$ на матрицу A^{-1} слева. Пользуясь ассоциативностью умножения матриц (теорема 1.4) и свойством 2.2 единичной матрицы, последовательно получаем:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Аналогично получаем

$$(YA)A^{-1} = CA^{-1} \Rightarrow Y(AA^{-1}) = CA^{-1} \Rightarrow YE = CA^{-1} \Rightarrow Y = CA^{-1},$$

Теорема доказана.

Частным случаем матричных уравнений являются системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Действительно, данную систему уравнений можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – матрица системы (3); X – столбец неизвестных и B – столбец свободных членов. Из теоремы 1.2.4 вытекает следствие.

Следствие 1.2.5. *Если число уравнений системы* (3) *равно числу неизвестных и для матрицы A существует обратная матрица, то решение системы может быть найдено по формуле* $X = A^{-1}B$, *где X – столбец неизвестных, а B – столбец свободных членов системы.*

1.3. Определители

Определение 1.3.1. *Определителем квадратной матрицы* $A = \left(a_{ij}\right)$ *порядка 2 называется число*

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель Δ (как и матрица A) имеет две строки и два столбца, числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя Δ.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22.$$

Определение 1.3.2. *Определителем квадратной матрицы* $A = \left(a_{ij}\right)$ *3-го порядка называется число*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 38 - 2 \cdot (-6) + 4 \cdot (-5) = 38 + 12 - 20 = 30.$$

Предположим, что мы уже знаем, как вычислять определители порядка $n-1$, и пусть нам дана квадратная матрица порядка n:

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение 1.3.3. *Минором M_{ij} порядка $n-1$, соответствующему элементу a_{ij} матрицы A, называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в A.*

Например, для матрицы A из определения 1.3.2

$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$, $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$, а $A_{12} = (-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12} = -\mathrm{M}_{12}$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\,\mathrm{M}_{22} = \mathrm{M}_{22}$.

Для любой матрицы A числа A_{ij} и M_{ij} либо совпадают, либо отличаются знаком согласно схеме

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Определение 1.3.4. *Определителем Δ квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ порядка n называется число*

$$\Delta = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \tag{5}$$

Формула (5) *называется также разложением определителя* $|A|$ *по первой строке.*

Таким образом, по определению 1.3.4 определитель 4-го порядка сводится к определителям 3-го порядка, которые мы уже умеем вычислять, определитель 5-го порядка сводится к определителям 4-го порядка и т.д. Например,

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 16 + 3 = 13.$$

1.4. Свойства определителей

Приведем основные свойства определителей с поясняющими комментариями. Для формулировки первого свойства нам понадобится функция $\operatorname{sign}(x)$ равная -1 при $x < 0$, 0 при $x = 0$ и 1 при $x > 0$.

Свойство 1.4.1. Определитель Δ квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ *порядка* n *равен сумме всех* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ *произведений вида* $a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$ *по* n *сомножителей* a_{ji_j} *взятых точно по одному из каждой строки и каждого столбца определителя:*

$$\Delta = |A| = \sum_{(i_1, i_2, \ldots i_n)} \operatorname{sing}\left(\prod_{j<k}(i_k - i_j)\right) \cdot a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}\,, \tag{6}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, *таким, что* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, *а произведение* $-$*по все парам* (k, j) *чисел* $k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *для которых* $j < k$.

Для $n = 2{,}3$ свойство 1.4.1 проверяется непосредственно, а для $n > 3$ доказывается методом математической индукции. Отметим, что в математической литературе по алгебре часто именно формула (6), а не (5), берется за основу определения определителя.

Свойство 1.4.2. *Если в определителе поменять строки и столбцы местами, т.е. транспонировать определитель, то его величина не изменяется:*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 1.4.2 достаточно легко вытекает из свойства 1.4.1. Оба определителя $|A|$ и $|A^T|$ есть сумма одних и тех же произведений, взятых с соответствующим знаком. Более детальный анализ показывает, что и знаки, с которыми входят одинаковые произведения в $|A|$ и $|A^T|$, совпадают.

Из 1.4.2 вытекает, что если некоторое общее свойство справедливо для строк определителя, то оно справедливо и для его столбцов.

Свойство 1.4.3. *Если все элементы какой-либо строки* (*столбца*) *определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.*

Доказательство. В этом случае каждое слагаемое формулы (6) равно 0 и свойство доказано.

Свойство 1.4.4. *Общий множитель всех элементов какой-либо строки* (*столбца*) *определителя можно выносить за знак определителя.*

Доказательство. Действительно, этот множитель будет присутствовать в каждом слагаемом формулы (6) и его можно вынести за знак суммы.

Свойство 1.4.5. *Для любой строки* (*столбца*) *определителя справедливо следующее свойство аддитивности:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} + c_{r1} & b_{r2} + c_{r2} & \cdots & b_{rn} + c_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство. Свойство непосредственно вытекает из формулы (6) и очевидного равенства

$$a_{1i_1} \cdot \ldots \left(b_{ri_r} + c_{ri_r}\right) \cdot \ldots a_{ni_n} = a_{1i_1} \cdot \ldots b_{ri_r} \cdot \ldots a_{ni_n} + a_{1i_1} \cdot \ldots c_{ri_r} \cdot \ldots a_{ni_n}.$$

Свойство 1.4.6. *При перестановке двух строк* (*столбцов*) *определитель меняет знак.*

Доказательство. У каждого слагаемого формулы (6) после перестановки двух строк изменяется знак.

Свойство 1.4.7. *Если в определителе две строки* (*два столбца*) *равны между собой, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Если равные строки переставить местами, то определитель Δ не изменится, а по свойству 1.4.6 он должен изменить знак. Отсюда $\Delta = -\Delta$ и $\Delta = 0$.

Свойство 1.4.8. *Если из одной строки* (*одного столбца*) *определителя вычесть другую строку* (*другой столбец*) *определителя, умноженную на некоторое число, то определитель не изменится.*

Доказательство. Свойство вытекает из свойств 1.4.4, 1.4.5 и 1.4.7.

Свойство 1.4.9. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки* (*столбца*) *на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \tag{7}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{8}$$

Формула (7) *называется разложением определителя по* i*-й строке, а формула* (8) – *разложением определителя по* j*-му столбцу.*

Свойство так же доказывается с использованием формулы (6). Оно показывает, что все строки и столбцы определителя в некотором смысле равноправны (сравните формулы (5), (6), (7) и (8)).

Свойство 1.4.10. *Сумма произведений элементов какой либо строки* (*столбца*) *определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки* (*столбца*) *определителя равна нулю, т.е.*

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \tag{9}$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Из свойства 1.4.9 следует, что формула (9) (формула (10)) является разложением определителя с двумя равными строками (столбцами), который равен нулю по свойству 1.4.7.

Наконец, приведем одно из самых важнейших свойств определителей.

Свойство 1.4.11. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей, т.е.* $|AB| = |A| \cdot |B|$.

1.5. Вычисление определителей приведением к треугольному виду

Определение 1.5.1. *Напомним, что элементы* a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} *квадратной матрицы* $A=\left(a_{ij}\right)$ *называются диагональными и составляют ее главную диагональ. Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, стоящие ниже главной диагонали* (*или выше главной диагонали*)*, равные нулю.*

Лемма 1.5.2. *Определитель треугольной матрицы A равен произведению ее диагональных элементов, т.е.*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

Доказательство. Доказательство леммы ведем индукцией по n:

а) непосредственной проверкой получаем, что для $n = 2$ формула справедлива:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22};$$

б) предположим, что формула верна для треугольных матриц порядка $n-1$ (индуктивное предложение). Покажем, что тогда она верна и для матриц порядка n. Разлагая определитель $|A|$ по первому столбцу (формула (8)), получаем равенство

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По индуктивному предположению полученный определитель порядка $n-1$ равен $a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$ и, следовательно, $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$;

в) из а) и б) следует, что доказываемая формула верна для всех n, и лемма доказана.

Определители приводят к диагональному виду при помощи элементарных преобразований строк (столбцов), основанных на свойствах определителей 1.4.4, 1.4.6, 1.4.8.

Определение 1.5.3. *Элементарные преобразования строк:*

1) *Вынесение общего множителя строки за знак определителя* (*по свойству 1.4.4*)*;*

2) *Перестановка двух строк* (*по свойству 1.4.6 определитель меняет знак*)*;*

3) *Вычитание из одной строки определителя другой строки, умноженной на число* $k \neq 0$ (*по свойству 1.4.8 определитель не меняется*).

Пример. *Вычислить определитель*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычтем из 2-й строки первую, а из 4-й – первую, умноженную на 2. Затем вынесем множитель 3 из 4-й строки за знак определителя и переставим 2-ю и 4-ю строки. Получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далее, вычтем из 3-й строки 2-ю, умноженную на 2, и в полученному определителе вычтем из 4-й строки 3-ю, умноженную на $\frac{1}{3}$:

$$|A| = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}.$$

По лемме 1.5.2 $|A| = -3 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} = -12$.

1.6. Нахождение обратных матриц, решение матричных уравнений

Определение 1.6.1. *Квадратная матрица A, определитель которой отличен от нуля, называется невырожденной.*

Теорема 1.6.2. *Для квадратной матрицы тогда и только тогда существует обратная матрица, когда она невырождена. Матрица A^{-1}, обратная для невырожденной матрицы A, может быть найдена по формуле*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} (*см. определение 1.3.3*).

Доказательство. Пусть для матрицы, A существует обратная матрица A^{-1}. Так как определитель единичной матрицы $E = A \cdot A^{-1}$, очевидно, равен 1, то из свойства 1.4.11 следует, что определитель матрицы A отличен от 0, более того, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Пусть теперь $|A| \neq 0$. Непосредственно перемножив матрицы из приведенный в теореме формулы (11) и воспользовавшись формулами (7), (9) из свойств 1.4.9, 1.4.10, мы получим единичную матрицу. Теорема доказана.

Пример. *Решить матричным методом систему уравнений*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ 3x - y + 2z = 7, \\ \ \ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Решение. По условиям примера решение нужно найти, используя теорему 1.2.4 и следствие 1.2.5. Согласно определению 1.3.2 находим определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1-2) - 3 \cdot (3-2) - (3-1) = -6 - 3 - 4 = -13.$$

Таким образом, $\Delta = -13 \neq 0$ и по теореме 1.6.2 для матрицы A существует обратная матрица, которую находим по формуле (11). Алгебраические дополнения A_{ij} вычисляем по определению 1.3.3, используя схему знаков (4).

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

По следствии 1.2.5, теореме 1.6.2 и формуле (11)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -26 \\ -39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$. Читателю рекомендуется сделать проверку.

Пример. Решить матричные уравнения $AX = B$ и $YA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение. Если матрица A невырожденная, то по теореме 1.2.4 $X = A^{-1}B$ и $Y = BA^{-1}$. Так как $|A| = -15 + 16 = 1 \neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица A^{-1} (теорема 1.6.2). Матрицу A^{-1} находим по формуле (11).

$$\begin{matrix} A_{11} = -5; & A_{12} = 8; \\ A_{21} = -2; & A_{22} = 3; \end{matrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35-10 & -20-22 \\ 56+15 & 32+33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -42 \\ 71 & 65 \end{pmatrix};$$

$$Y = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35+32 & -14+12 \\ -28+88 & -10+33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 63 & 23 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $X \neq Y$, читателю рекомендуется сделать проверку.

1.7. Теорема Крамера

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases} \tag{12}$$

Определение 1.7.1. *Матрица $A = (a_{ij})$ и определитель $|A| = \Delta$*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются матрицей и определителем системы (12). *Столбец B, составленный из чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$, называется столбцом свободных членов системы* (12).

Обозначим через Δ_i определитель, полученный из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots; \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.7.2 (*теорема Крамера*). *Если определитель Δ системы* (12) *отличен от 0, то система* (12) *имеет единственное решение, которое можно найти по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{13}$$

Доказательство. Система (12) равносильна матричному уравнению $AX = B$, где X – столбцы неизвестных, B – столбец свободных членов. По теореме 1.2.4 это уравнение имеет единственное решение $X = A^{-1}B$. По формулам (11), (8) для каждого j $(1 \le j \le n)$ имеем

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1j}b_1 + \cdots + A_{nj}B_n\right) = \frac{\Delta_j}{\Delta}.$$

Теорема доказана.

Пример. *С помощью формул Крамера решить систему*

$$\begin{cases} 2x + \ y = 1, \\ 5x + y = 7. \end{cases}$$

Решение. Находим $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -6;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9.$$

По формулам Крамера (13) $x = \frac{-6}{-3} = 2$, $y = \frac{9}{-3} = -3$.

1.8. Ранг матрицы, теорема Кронекера-Капелли

Пусть

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– матрица, состоящая из m и n столбцов и $k \le \min\{m, n\}$. Выберем в матрице A произвольным образом k строк с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и k столбцов с номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. Тогда элементы матрицы A, стоящие на пересечениях выбранных строк и столбцов, составляют квадратную матрицу A_k порядка k с определителем $|A_k| = M_k$.

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}; \quad M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Определитель M_k называется минором i-го порядка матрицы A.

Число всех миноров матрицы A быстро растет с ростом ее размера.

Так, например, число всех миноров матрицы размера 3×4 равно 34, а матрицы размера 4×4 – 69.

Определение 1.8.1. *Найдем все миноры Матрицы A, отличные от нуля, и среди них выберем минор M_k наибольшего порядка k. Так выбранное число k называется рангом матрицы A и обозначается* $\mathrm{rank}(A)$.

На практике ранг матрицы вычисляется методом окаймляющих миноров и с помощью элементарных преобразований строк (или столбцов, или и строк и столбцов). Второй метод с вычислительной точки зрения более экономичен.

Определение 1.8.2. *Элементарные преобразования строк* (*столбцов*)*:*

1) *Умножение или деление строки* (*столбца*) *на число, отличное от нуля;*
2) *Перестановка двух строк* (*столбцов*)*;*
3) *Вычитание из одной строки* (*столбца*) *матрицы другой строки* (*другого столбца*)*, умноженной* (*умноженного*) *на некоторое число.*

Легко убедиться, что элементарные преобразования обратимы, и если матрица B получена из матрицы A элементарными преобразованиями, то и матрицу A можно получить из матрицы B элементарными преобразованиями. При этом матрицы A и B называются эквивалентными и обозначают $A \sim B$. Оказывается справедлива следующая теорема.

Теорема 1.8.3. *Если* $A \sim B$, *то* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Пример. Найти ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 9 & -3 \\ 3 & 15 & -6 & 15 \\ 0 & 14 & -10 & 12 \end{pmatrix}$$

Решение. Разделим 2-ю и 3-ю строки матрицы на 3, 4-ю разделим на 2 и затем переставим в полученной матрице 1-ю и 2-ю строки (для того, чтобы элемент b_{11} новой матрицы $B \sim A$ был равен 1; с его помощью мы в дальнейшем уничтожим другие ненулевые элементы в 1-м столбце).Таким образом, мы от матрицы A перешли к матрице $B \sim A$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычтем из 2-й строки матрицы B 1-ю строку, умноженную на 2 (для того, чтобы в полученной матрице $C \sim B$ выполнилось равенство $c_{21} = 0$), и из 3-й строки вычтем 1-ю строку (для того, чтобы $c_{31} = 0$).

В матрице $C \sim A$ 2-я, 3-я и 4-я строки одинаковы. Вычтем из 3-й и 4-й строки 2-ю строку, получим матрицу D, эквивалентную матрице A.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 6 \\ 0 & 7 & -5 & 6 \\ 0 & 7 & -5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все миноры порядка ≥ 3 матрицы D очевидно равны 0, а минор порядка 2 на пересечениях строк и столбцов с номерами 1, 2 равен 7 и отличен от 0. Таким образом, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(D) = 2$.

Подчеркнем, что матрицы A и D связывает не только равенство рангов, они еще и эквивалентны, то есть, могут быть получены друг из друга с помощью элементарных преобразований.

Рассмотрим систему линейных уравнений самого общего вида, состоящую из m уравнений и с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{14}$$

Выпишем матрицу A и расширенную Матрицу A^* системы (14)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

И найдем ранги $\operatorname{rank}(A)$ и $\operatorname{rank}(A^*)$ этих матриц. Оказывается справедлива теорема 1.8.5, называемая теоремой Кронекера-Капелли.

Теорема 1.8.5. *Для системы* (14) *возможны три случая:*

1) *Если* $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A^*)$*, то система не имеет решений;*

2) *Если* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^*) = n$*, то система имеет единственное решение;*

3) *Если* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^*) < n$*, то система имеет бесконечно много решений.*

1.9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

В настоящей главе мы познакомимся с универсальным методом решения произвольных систем линейных уравнений.

Самый простой для понимания метод решения систем уравнений вида (14) – метод подстановки, изучаемый в школе. Несложной модификацией этого метода является метод последовательного исключения неизвестных – так называемый метод Гаусса. Метод Гаусса с вычислительной точки зрения экономичней метода прямой подстановки. Наконец, четкое осознание того, что в методе Гаусса уравнения можно заменить строками матрицы и действия производить над стройками, а не над уравнениями, приводит к последнему – самому эффективному с вычислительной точки зрения методу. Этот последний метод является тем же самым методом Гаусса, но наиболее высокоорганизованным. Разберем все три метода на примере решения системы уравнений.

Метод подстановки.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Из 1-го уравнения выразим x_1 и подставим это выражение во 2-е и 3-е уравнения, получим систему уравнений, эквивалентную исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3 \\ -8 - 4x_2 + 6x_3 + 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ -12 - 6x_2 + 9x_3 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3, \\ -x_2 + 10x_3 = 28, \\ -7x_2 + 10x_3 = 16. \end{cases}$$

Затем из 2-го уравнения полученной системы выражаем x_2 и подставляем в 3-е уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3 \\ -x_2 = 28 - 10x_3 \\ -70x_3 + 7 \cdot 28 + 10x_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3, \\ -x_2 = 28 - 10x_3, \\ -60x_3 = -180. \end{cases}$$

Теперь идем «назад», подставляя $x_3 = 3$ в уравнение 2, находим $x_2 = 2$, а подставляя $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ в уравнение $x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3$, получаем $x_1 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3 \\ -x_2 = 28 - 10 \cdot 3 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

И система решена. Метод подстановки прост, но содержит много лишних вычислений. Метод последовательного исключения неизвестных – или метод Гаусса фактически производит те же действия, но с меньшими выкладками.

Метод Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 20 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Вычтем из 2-го уравнения 1-е уравнение, умноженное на 2, а из 3-го – 1-е уравнение, умноженное на 3 (с целью исключения неизвестной x_1 из этих уравнений). Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ \quad -x_2 + 10x_3 = 28 \\ \; -7x_2 + 10x_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ \quad -x_2 + 10x_3 = 28, \\ \qquad -60x_3 = -180. \end{cases}$$

Из 3-го уравнения левой системы мы вычли 2-е уравнение, умноженное на 7, и получили правую систему. Теперь из 3-го уравнения правой системы находим x_3, подставляя $x_3 = 3$ во 2-е уравнение, получаем $x_2 = 2,$ а затем из уравнения 1 найдем $x_1 = 1,$ т.е. «обратный» процесс в данном методе тот же, что и в методе подстановки. Но в первой части решения по методу Гаусса вычислений значительно меньше, чем в методе подстановки, а результат получаем тот же.

Модифицированный метод Гаусса. Заметим, что тот же алгоритм решения мы можем записать в расширенных матрицах систем, вычитая из 2-ой строки матрицы 1-ю, умноженную на 2, вычитая из 3-й строки 1-ю, умноженную на 3 и т.д.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 20 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 10 & 28 \\ 0 & -7 & 10 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 10 & 28 \\ 0 & 0 & -60 & -180 \end{array}\right).$$

Более того, разделив последнюю строку полученной матрицы на -60 (такое действие тоже является элементарным преобразованием по определению 1.8.2), с помощью матриц легко записать и «обратный» процесс вычисления, который заключается в уничтожении ненулевых элементов, стоящих выше главной диагонали:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 10 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

При этом понятно, что последней матрице соответствует система уравнений $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, то есть, ответ задачи.

Отметим, что метод решения основанный на приведении исходной матрицы системы к диагональной, называется методом полного исключения Гаусса.

Легко убедиться, что в данном решении вычислений как минимум в 2 раза меньше, чем в решении методом подстановки, причем вычисления лучше контролируется и снижается вероятность ошибки.

По теореме Кронекера-Капелли 1.8.5 при решении (исследовании) систем линейных уравнений возможны три случая. Случай, когда система имеет единственное решение, мы только что разобрали. Приведем примеры других возможных случаев.

Пример. *Исследовать системы уравнений*

1) $\begin{cases} -2x + y - z = 5, \\ 3x - y + 3z = 7, \\ -x + y + z = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14. \end{cases}$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы 1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -15 \\ 0 & 2 & 6 & 37 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Последней строке этой матрицы соответствует уравнение

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 7$,

То есть $0 = 7$, что невозможно. Следовательно, система 1) не имеет решений.

Исследуем вторую систему.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Мы вычеркнули нулевую строку матрицы – ей соответствует тождественное уравнение $0 = 0$. У нас осталась система из двух уравнений с тремя неизвестными, одно из которых можно положить равным произвольной константе c:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 8 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 3x_3 \\ x_2 = 5 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 3c, \\ x_2 = 5 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Система 2) имеет бесконечно много решений. Неизвестная $x_3 = c$ называется *свободной.*

1.10. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим произвольную систему линейных *однородных* уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Так как расширенная матрица A^* системы (15) отличается от матрицы A системы нулевым столбцом $B = O$, то $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ и по теореме 1.8.5 система (15) всегда совместна, что можно так же определить, заметив, что $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ – решение системы (15), называемое *тривиальным решением.*

Запишем систему (15) в матричном виде:

$$AX = O, \tag{15}$$

где A – матрица системы; X – столбец неизвестных; O – нулевой столбец сводных членов. Решения системы так же будем записывать в виде векторов-столбцов, например, O – тривиальное решение.

Теорема 1.10.1. *Пусть X_1 и X_2 – произвольные решения системы* (15). *Тогда их линейная комбинация $X_3 = \alpha X_1 + \beta X_2$, где α и β – любые числа, так же является решением системы* (15).

Доказательство. Применим матричную запись системы. По условиям теоремы $AX_1 = O$ и $AX_2 = O$. используя теорему 1.3, последовательно получаем

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = A(\alpha X_1) + A(\beta X_2) = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = \alpha O + \beta O = O.$$

Таким образом, X_3 является решением системы (15). Теорема доказана.

Теорема 1.10.1 показывает, что множество решений системы (15) является *линейным пространством* (определение линейного пространства см., например, в $[1-4]$). Следующая теорема устанавливает связь между решениями систем (14) и (15).

Теорема 1.10.2. *Пусть Y_1 и Y_2 – произвольные решения системы* (14). *Тогда их разность $X = Y_2 - Y_1$ есть решение системы* (15). *Любое решение Y системы* (14) *есть сумма $X + Y_0$ некоторого решения X системы* (15) *и фиксированного решения Y_0 системы* (14).

Теорему рекомендуем доказать самостоятельно.

Выясним, когда система (15) имеет нетривиальное решение. Непосредственно из теоремы 1.8.5 следует теорема 1.10.3.

Теорема 1.10.3. *Система* (15) *тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда* $\mathrm{rank}(A) < n$.

В случае, когда число уравнений системы (15) равно числу ее неизвестных, то есть $m = n$, из теоремы 1.10.3 и теоремы Крамера 1.7.2 вытекает теорема 1.10.4.

Теорема 1.10.4. *Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда определитель системы равен* 0.

Глава 2. Векторная алгебра

Физические величины можно разделить на две существенно различные категории: скалярные и векторные. Скалярные величины имеют лишь числовое значение. Физические величины, которые кроме числового значения характеризуются еще и направлением, называются векторными.

Примерами скалярных величин является температура, масса, работа. Такие же физические величины, как скорость, сила, момент и т.д., характеризуются числовым значением и направлением действия, т.е. являются векторными величинами.

Векторную величину обозначают направленным отрезком $\overline{AB}$. Точку A называют началом или точкой приложения вектора (рис. 2.1).

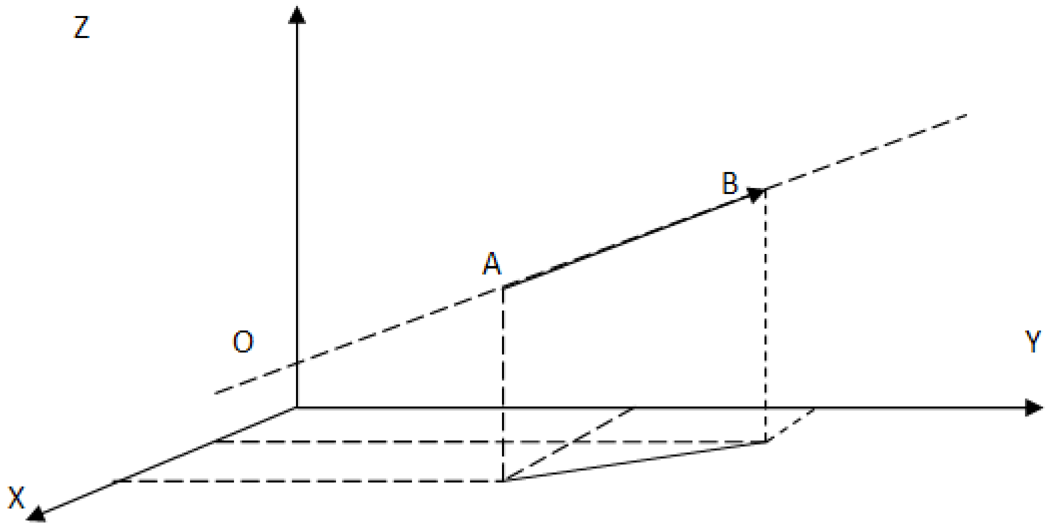


Рис. 2.1

Точку B называют концом вектора. Продолжая в обе стороны отрезок AB , получим прямую, которая называется линией действия вектора. Очевидно, что вектор однозначно определяется линией действия, направлением и точкой приложения.

Все векторы подразделяются на три категории: свободные, скользящие и закрепленные векторы. Свободными векторами представляются векторные физические величины, не изменяющиеся при переходе от одной точки пространства к любой другой. Такой вектор характеризует физическую величину во всем исследуемом пространстве. Так, при поступательном движении твердого тела скорости каждой точки тела равны между собой по величине и направлению. Скорость такого движения твердого тела задается одним свободным вектором.

Скользящие векторы представляют собой векторные величины, остающиеся неизменными вдоль линии действия вектора. Они изменяются при переходе к другой точке пространства, не лежащей на линии действия. Например, сила, приложенная к точке A твердого тела, сообщит последнему вполне определенное движение из данного состояния. Такое же движение сообщит эта сила, будучи приложенной к произвольной точке B, расположенной на той же линии действия.

Закрепленные векторы представляют векторные физические величины только в данной точке пространства. В других точках пространства они либо имеют другое значение, либо вообще теряют смысл. Такими векторами являются, например, вектор силы, приложенной к деформируемому телу, вектор скорости, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, вектор момента. Рассмотрим свободные векторы и изучим их свойства.

2.1. Свободные векторы

2.1.1. Геометрические свойства свободных векторов

Итак, *вектор* $\overline{AB}$ *– это направленный отрезок с началом в точке* A *и концом в точке* B. Если начало и конец вектора совпадают, то он называется нулевым и обозначается $\overline{0}$.

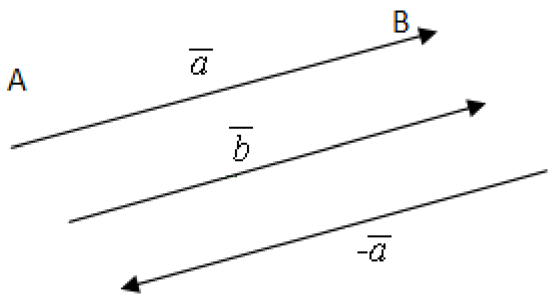


Рис. 2.1.1

Модуль (*длина*) вектора $\overline{AB}$ по определению равна длине отрезка $\overline{AB}$ и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$. Модуль вектора $\overline{0}$ равен 0. Векторы, расположенные на одной прямой, или на параллельных прямых называются *коллинеарными.* Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну сторону и имеют равные длины. Векторы $-\overline{a}$ и $\overline{a}$ коллинеарны, имеют одинаковые длины и направлены в разные стороны (рис. 2.1.1).

Подчеркиваем, что мы рассматриваем векторы, которые можно переносить параллельно себе, помещая начало вектора в любую точку плоскости (пространства). Углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший угол $\alpha = \angle AOB$ между этими векторами, приведенными к общему началу O (рис. 2.1.2).

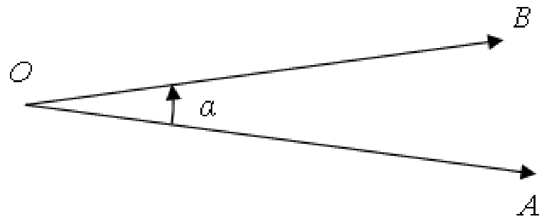


Рис.2.1.2

Очевидно, что $0 \le \alpha \le \pi$.

2.1.2. Сложение векторов

Определение 2.1.1. *Суммой свободных векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$ *называется свободный вектор*

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \dots + \overline{a}_k,$$

для построения которого нужно последовательно отложить в любом порядке векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$ *, совмещая начало каждого следующего с концом предыдущего; замыкающий вектор* $\overline{a}$*, начало которого совпадает с началом первого, а конец с концом последнего, представляет собой вектор суммы свободных векторов* (рис. 2.1.3).

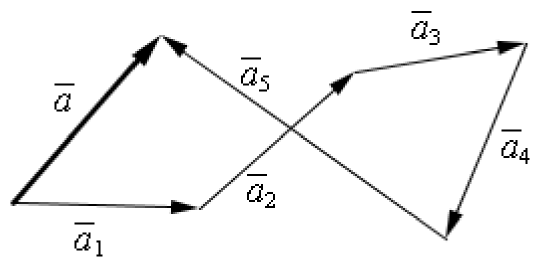


Рис. 2.1.3

В механике вектор $\overline{a}$ называют равнодействующим. Для сложения двух свободных векторов отсюда получаем правило параллелограмма и коммутативность операции сложения, т.е. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$, поскольку сумма двух свободных векторов является свободным вектором, совпадающим по величине и по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 2.1.4, a).

Вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ мы определим из равенства $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$, что дает нам правило треугольника (рис. 2.1.4, b, c).

a) b) c)

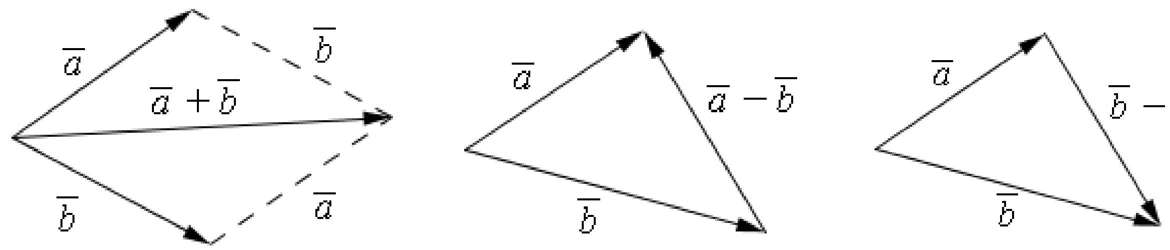


Рис.2.1.4

Нетрудно убедиться, что операция сложения векторов ассоциативна, т.е.

$$\overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \left(\overline{b} + \overline{a}\right) + \overline{c}.$$

Напомним, что произвольный вектор $\overline{a}$ можно умножить на любое число α. При этом вектор $\alpha \cdot \overline{a}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$, $|\alpha\overline{a}| = |\alpha| \cdot |\overline{a}|$, направления векторов $\overline{a}$ и $\alpha\overline{a}$ совпадают, если $\alpha > 0$ и противоположны, если $\alpha < 0$ (рис. 2.1.5).

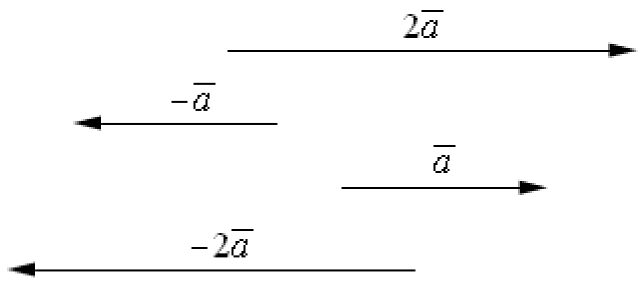


Рис.2.1.5

2.1.3 Проекции векторов

Рассмотрим проекцию свободного вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на ось L, т.е. на прямую с заданным направлением. Из точек A и B на прямую L отпустим перпендикуляры AA' и BB' (рис. 2.1.6, a,b).

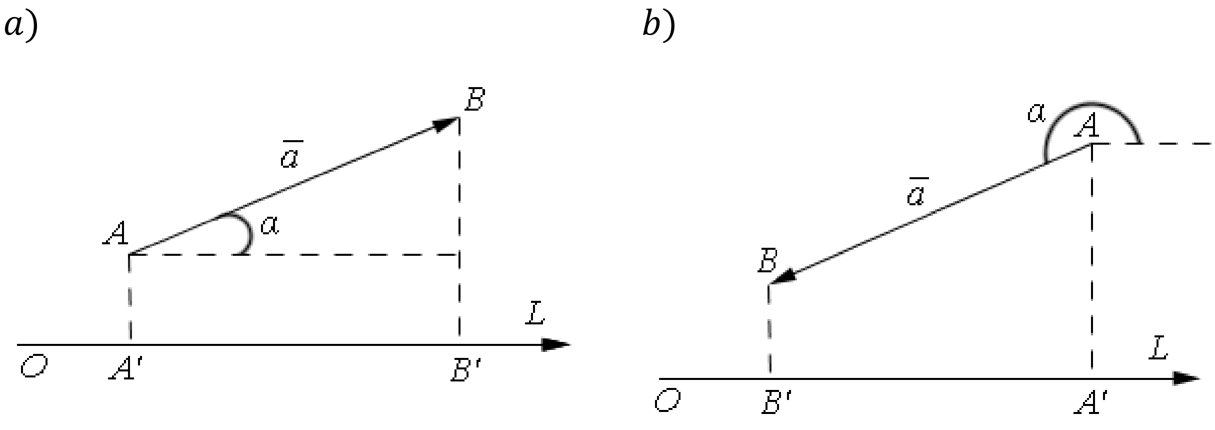


Рис.2.1.6

Длина отрезка $A'B'$ с учетом его направления на оси L называется проекцией вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на ось L и обозначается через $\text{Пр}_L\, \overline{a}$. Таким образом, $\text{Пр}_L \overline{a} = \ x_B - \ x_A$, где x_A, x_B – координаты точек A' и B' на координатной оси L. Отметим, что проекция вектора на ось является скалярной величиной, равной произведению модуля вектора на косинус угла α между направлениием оси и направлением вектора (рис. 2.1.6, *a*,*b*).

$$\text{Пр}_L\, \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha\, .$$

Наиболее значимы в дальнейшем проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси OX , OY , OZ , т.е. координаты вектора $\overline{a}$ в заданной прямоугольной координационной системе $OXYZ$ (рис. 2.1.7). Удобно ввести для них специальные обозначения:

$$\text{Пр}_X\, \overline{a} = a_x\, , \quad \text{Пр}_Y \overline{a} = a_y\, , \quad \text{Пр}_Z \overline{a} = a_z\, .$$

Нетрудно убедиться, что каждый свободный вектор однозначно определяется его проекциями $\overline{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$ или своей длиной $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и углами α, β и γ с координатными осями X, Y, Z соответственно (рис 2.1.7). Очевидно, справедливы следующие формулы:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

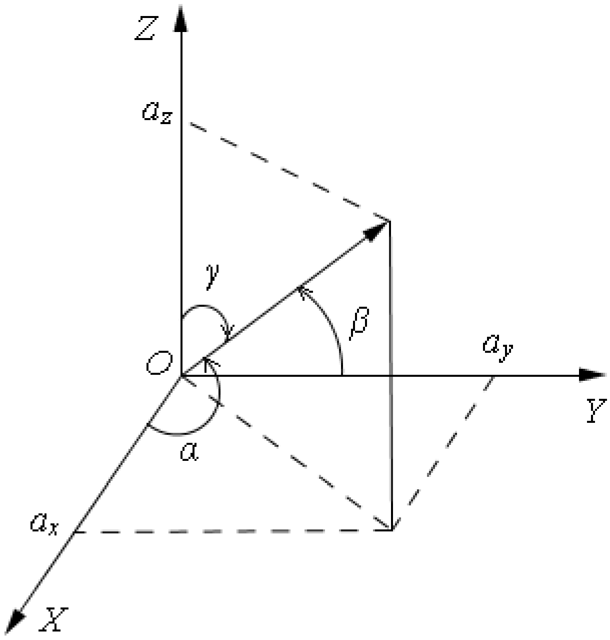


Рис.2.1.7

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\overline{a}$, а числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\overline{a}$ в прямоугольной системе координат $OXYZ$.

Напомним, наконец, что для любого числа α вектор $\alpha\overline{a}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$, $|\alpha\overline{a}\,| = |\alpha| \cdot |\overline{a}|$, и если $\alpha > 0$, то векторы $\overline{a}, \alpha\overline{a}$ направлены в одну сторону, а если $\alpha < 0$, то в разные.

Теорема 2.1.2. *Проекция суммы свободных векторов равна сумме проекций составляющих векторов.*

Теорему достаточно доказать для двух слагаемых. Рассмотрим произвольную прямую, на которой выберем положительное направление, указанное на рис. 2.1.8 стрелкой. Примем эту прямую за ось X. Пусть x_{i-1} и x_i координаты ортогональных проекций начала и конца вектора $\overline{a}_i$ на ось X (рис. 2.1.8).Найдем проекцию суммы векторов $\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$.

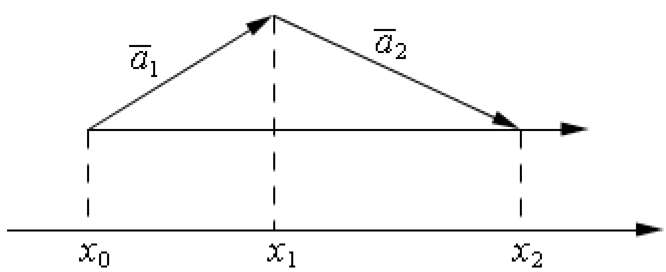


Рис.2.1.8

Из чертежа ясно, что $a_x = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) = x_2 - x_0$, тем самым теорема верна.

Пример. На тело действует четыре сходящиеся силы, проекции которых заданы: $\overline{F}_1\ (1;\ 10;\ 3)$; $\overline{F}_2\ (2;\ 15;\ 4)$; $\overline{F}_3\ (0; -5;\ 1)$; $\overline{F}_4\ (2;\ 10; -2)$. Найти модуль и направляющие косинусы суммы $\overline{F}$.

Решение. Согласно теореме 2.1.2 находим координаты вектора $\overline{F}$.

$$F_x = 1 + 2 + 0 + 2 = 5; F_y = 10 + 15 - 5 + 10 = 30; F_z = 3 + 4 + 1 - 2 = 6.$$

По теореме Пифагора

$$|\overline{F}\,| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{5^2 + 30^2 + 6^2} = \sqrt{961} = 31.$$

Теперь находим направляющие косинусы вектора $\overline{F}$.

$$\cos\alpha = \frac{5}{31}\,; \cos\beta = \frac{30}{31}; \cos\gamma = \frac{6}{31}.$$

2.1.4. Свободные вектора в координатной форме

Итак, свободный вектор $\overline{AB}$ – это направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B (рис. 2.1.9). Подчеркиваем, что мы рассматриваем векторы, которые можно переносить параллельно себе, помещая начало вектора в любую точку плоскости (пространства).

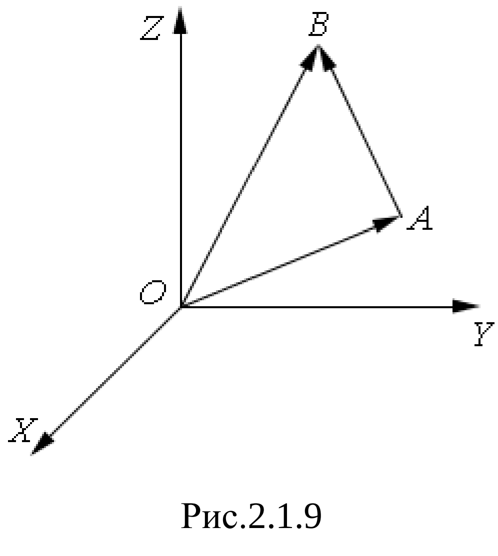


Рис.2.1.9

Пусть на плоскости (в пространстве) задана система координат $(OXYZ)$, так что любая точка A получает свои координаты, равные координатам вектора $\overline{OA}$. Согласно теореме 1, каждый свободный вектор $\overline{a}$ получает свои координаты. Для того, чтобы найти координаты вектора

$\overline{a} = \overline{AB}$, нужно из координат его конца B вычесть координаты начала A. например, если $A(1;2;-3)$, $B(2;1;0)$, то $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2;1;0) - (1;2;-3) = (1;-1;3)$.

Мы будем записывать $\overline{a} = (x;y)$ или $\overline{a} = (x;y;z)$, если x,y,z – координаты вектора $\overline{a}$ на плоскости (в пространстве) в заданной системе координат.

Пример. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A\ (2;-1;3), B(1;2;1), C(0;-1;2)$ (рис. 2.1.10).

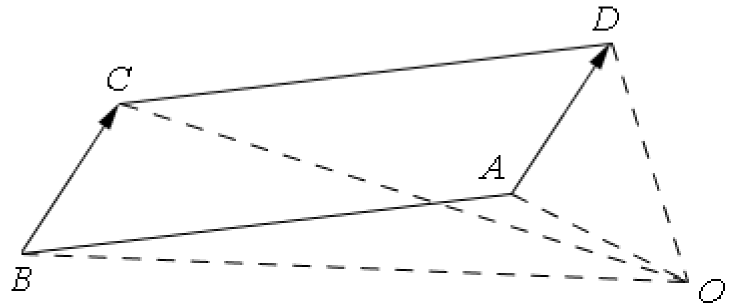


Рис. 2.1.10

Решение. Очевидно (рис.2.1.10), $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{BC} = \overline{OA} + \overline{OC} - \overline{OB}$ и подставив координаты получаем:
$\overline{OD} = (2;-1;3) + (0;-1;2) - (1;2;1) = (1;0;4)$.

Как известно, множества свободных векторов на плоскости и в пространстве являются линейными (векторными) пространствами R_2 и R_3 (см., например $[1,2]$). Напомним некоторые определения. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ линейного пространства называется линейно зависимой, если хотя бы один из векторов этой системы, например, вектор $\overline{a}_1$, является линейной комбинацией (линейно зависит от) остальных векторов, т.е. представим в виде

$$\overline{a}_1 = \alpha_2 \overline{a}_2 + \dots + \alpha_n \overline{a}_n, \tag{1}$$

где $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ – действительные числа, и линейно независимой в противном случае. Максимальные линейно независимые системы векторов линейного пространства L называются базисными. Если $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ – базис линейного пространства L, то каждый вектор $\overline{b} \in L$ представим в виде

$$\overline{b} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \dots + \alpha_n \overline{a}_n, \tag{2}$$

причем это представление единственно. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора $\overline{b}$ в базисе $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$.

2.2. Системы координат

Рассмотрим возможные декартовые системы координат на плоскости и в трехмерном пространстве, тесно связанные с базисами соответствующих векторных пространств R_2, R_3 .

2.2.1. Базисы двухмерного векторного пространства

Очевидно, что свободные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ из R_2 коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overline{a} = \alpha\overline{b}$ или $\overline{b} = \beta\overline{a}$. В частности, коллинеарные векторы линейно зависимы. Если векторы $\overline{a}, \overline{b} \in R_2$ неколлинеарны, то любой вектор $\overline{c}$ из R_2 является их линейной комбинацией (см. на рис. 2.2.1, a, b примеры разложения вектора $\overline{c}$).

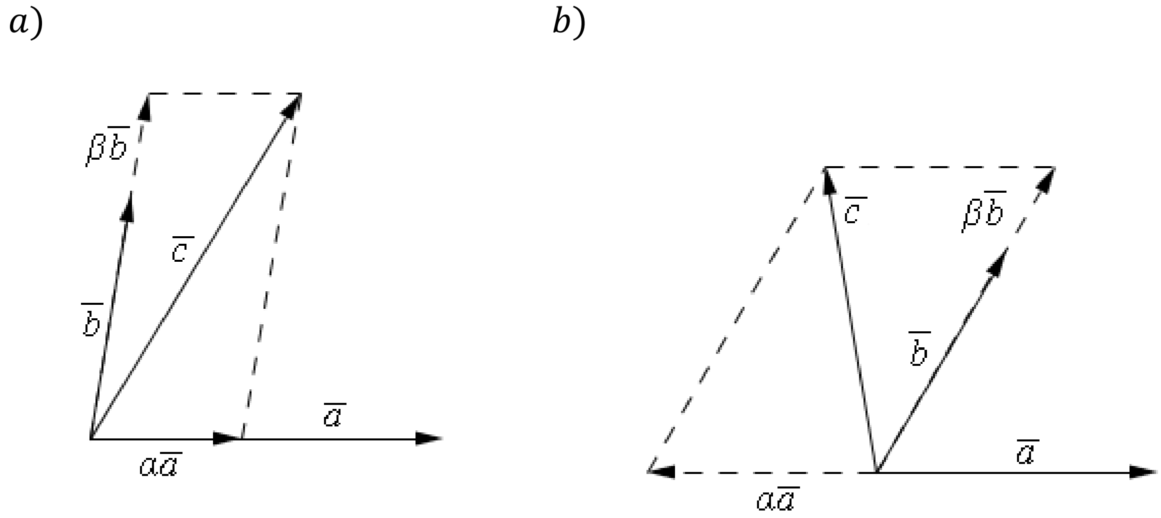


Рис. 2.2.1

Итак, справедлива теорема:

Теорема 2.2.1. *На плоскости, любые два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют базис. Каждый вектор $\overline{c}$ плоскости однозначно представим в виде $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, где $(\alpha;\ \beta)$ – координаты вектора $\overline{c}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}$.*

Отметим, что таким способом можно получать не только прямоугольные, но и косоугольные системы координат.

Пример. Найти координаты вектора $(1; 0)$ в базисе $(1; 2)$, $(-1; 3)$.

Решение. Запишем искомое разложение, представив наши векторы в виде столбцов; получим систему линейных уравнений.

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему по формулам Крамера (см. [1]– [8]):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

и $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{3}{5} = 0{,}6;\ \ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{2}{5} = -0{,}4$. Следовательно,

$$(1; 0) = 0{,}6 \cdot (1;\ 2) - \ 0{,}4\ \cdot (-1;\ 3) = (0{,}6;\ 1{,}2) + (0{,}4;\ -1{,}2).$$

Искомые координаты – $(0{,}6; -0{,}4)$.

2.2.2. Базисы в трехмерном пространстве

Перейдем к векторам пространстве R_3. Векторы из R_3 называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны. Ввиду теоремы 2.2.1 любые три компланарных вектора линейно зависимы. Поэтому из теоремы о критерии линейной независимости векторов в R_n (см., например, $[1-3]$) вытекает теорема 2.2.2.

Теорема 2.2.2. Векторы $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и $\overline{c} = (x_3; y_3; z_3)$ компланарны в том и только том случае, когда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta^T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.3. *В пространстве любые три некомпланарные вектора* $\overline{a}$, $\overline{b}, \overline{c}$ *образуют базис. Для любого вектора* $\overline{a}$ *пространства существует единственное разложение вида* $\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, *где* $(\alpha; \beta; \gamma)$ *– координаты вектора* $\overline{a}$ *в базисе* $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

Геометрический пример разложения вектора $\overline{d}$ по правилу параллелепипеда см. на рис. 2.2.2

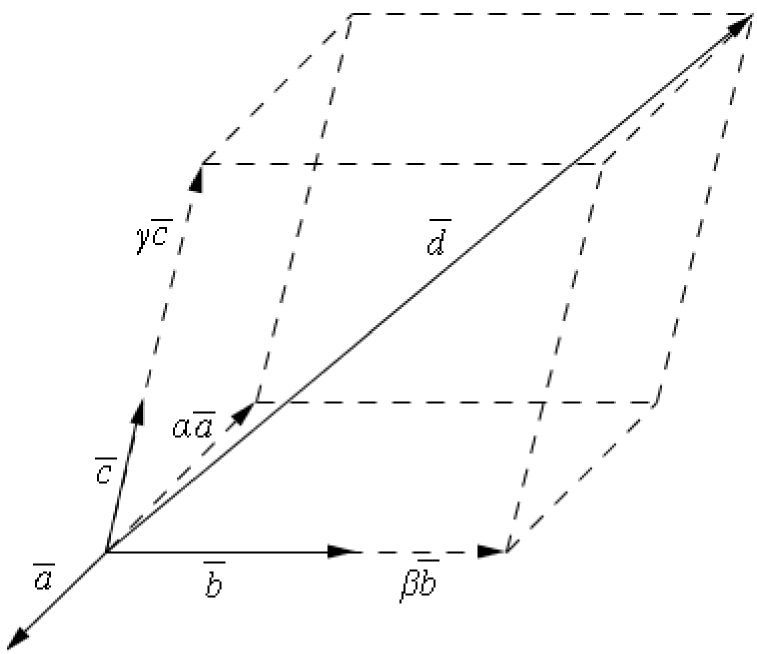


Рис.2.2.2

Пример. Составляют ли базис в R_3 векторы $\overline{a} = (1; 2; 1)$, $\overline{b} = (2; 0; 1)$, $\overline{c} = -(3; 2; 1)$? Если да, то найти разложение вектора $\overline{d} = (5; 10; 3)$ по этому базису.

Решение. Воспользуемся теоремой 2.2.3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 - 1 \cdot (2-6) = 4 \neq 0.$$

Таким образом, векторы $\overline{a} = (1; 2; 1)$, $\overline{b} = (2; 0; 1)$, $\overline{c} = (3; 2; 1)$ не компланарны и по теореме 4 составляют базис в R_3. Ищем координаты x, y, z вектора $\overline{d}$ в этом базисе. Из разложения $x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b} + z \cdot \overline{c} = \overline{d}$ получаем систему уравнений и решаем ее методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - 0y + 2z = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Таким образом, в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ вектор $\overline{d}$ имеет координаты $(3; -2; 2)$,

т.е. $\overline{d} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 2\overline{c}$.

2.2.3. Декартовы прямоугольные системы координат

Декартовы системы координат на плоскости подробно рассматривались в школе. Остановимся на декартовой прямоугольной системе координат $OXYZ$ в пространстве (рис. 2.2.3, a, b).

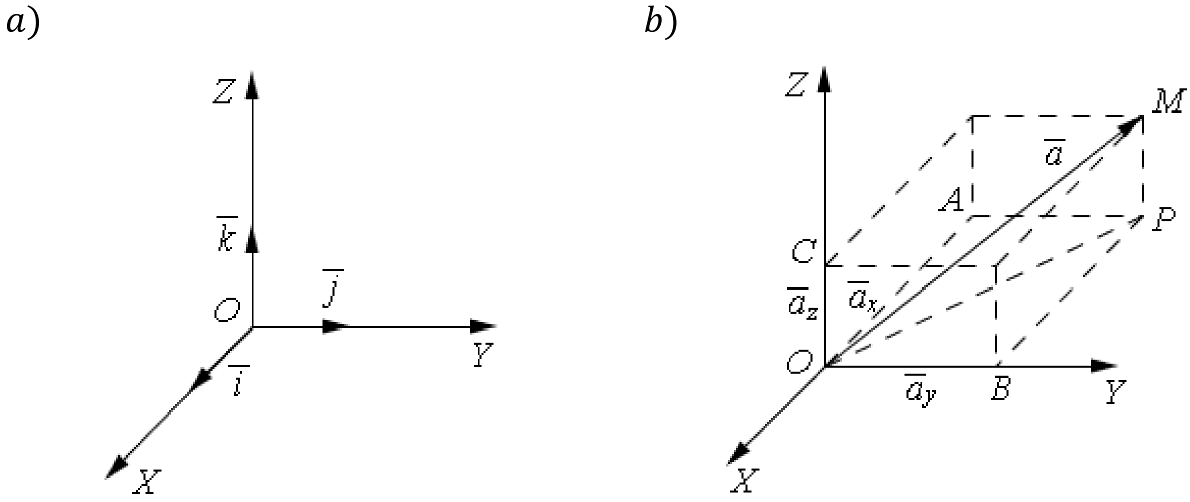


Рис. 2.2.3

Напомним, что точка O называется *началом координат*, ось OX – *осью абсцисс*, ось OY – *осью ординат* и ось OZ – *осью аппликат*. Плоскости OXY, OXZ и OYZ называются *координатными*. Три единичных взаимно перпендикулярных вектора $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ единичной длины (рис. 2.2.3, a) называются *ортами*, а базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ – *ортонормированным базисом*.

Каждая точка M пространства получает свои координаты $(\overline{a}_x, \overline{a}_y, \overline{a}_z)$, равные координатам *радиуса-вектора* $\overline{OM}$ (рис. 2.2.3, b). Проводя через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям, получим прямой параллелепипед, диагональю которого является вектор $\overline{OM}$. Дважды пользуясь правилом параллелограмма, получаем $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, то есть $\overline{OM} = \overline{a}_x \cdot \overline{i} + \overline{a}_y \cdot \overline{j} + \overline{a}_z \cdot \overline{k}$. Дважды применяя теорему Пифагора, получаем

$$|OM|^2 = |OP|^2 + |MP|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |MP|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

и $|\overline{OM}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.4. *Модуль вектора* $\overline{M_1M_2}$ *и расстояние между двумя точками* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *вычисляются по формуле*

$$|M_1M_2| = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2.3. Скалярное произведение

2.3.1. Определение скалярного произведения, примеры

Определение 2.3.1. *Пусть $\overline{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ – произвольные векторы из векторного пространства R_n векторов-строк длины n. Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число*

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Теорема 2.3.2. *Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in R_n$ и произвольного числа $\alpha \in R$ справедливы следующие свойства:*

1) $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 \geq 0$, *причем $\overline{a}^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} = 0$.*
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.
3) $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.
4) $(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \left(\alpha\overline{b}\right) = \alpha\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$.
5) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{b}^T$ *, – здесь справа обычное матричное умножение, $\overline{b}^T$ – вектор-столбец* (*здесь* ^{T} *– операция транспонирования*).

Доказательство. Теорема доказывается непосредственной проверкой.

Из свойств 2–4 теоремы вытекает, что

$$\left(\sum_i \alpha_i\overline{a}_i\right) \cdot \left(\sum_j \beta_j\overline{b}_j\right) = \sum_i \sum_j \alpha_i\beta_j\left(\overline{a}_i \cdot \overline{b}_j\right) \qquad (3)$$

Определение 2.3.3. *Пусть L – линейное пространство и любой паре элементов $a, b \in L$ поставлено в соответствие число $a \cdot b = (a, b)$. Если для любых элементов $a, b, c \in L$ и любого вещественного числа α выполняются утверждения 1–4 теоремы 2.3.2, то число $a \cdot b$ называют скалярным произведением элементов $a, b \in L$. Линейное пространство L с заданным скалярным произведением называется евклидовым пространством.*

Пример. Пусть L – пространство всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций и для любых функций $f = f(x), g = g(x) \in L$ положим

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Тогда (f,g) – скалярное произведение и, значит, пространство L с данным скалярным произведением является евклидовым.

2.3.2. Свойства скалярного произведения

Рассмотрим свойства скалярного произведения в R_3 для случая, когда базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ в R_3 совпадает с ортонормированным базисом $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Покажем, что в этом (и только в этом) случае скалярное произведение имеет простой геометрический смысл. Пусть $\overline{a}$ – произвольный вектор из R_3. Имеем $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ (рис.2.3.1) и ввиду теоремы 2.2.4.

$$\alpha\overline{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\overline{a}|^2, \tag{4}$$

где $|\overline{a}|$ – длина вектора $\overline{a}$.

Теорема 2.3.4. *Скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}, \overline{b}$ из R_3 в ортонормированном базисе $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ равно произведению их длин на косинус угла α между ними, т.е.*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Доказательство. По теореме 2.3.2 и формуле (4) имеем

$$|\overline{a} + \overline{b}|^2 = (\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \overline{a}^2 + \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{a} + \overline{b}^2 = |\overline{a}|^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2.$$

Следовательно

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \frac{|\overline{a} + \overline{b}|^2 - |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2}{2}$$

И мы показали, что скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$ выражается через длины векторов $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и поэтому не зависит от выбора ортонормированной системы координат (при условии сохранения единицы длины), т.е. скалярное произведение не изменится, если систему координат выбрать специальным образом. Выберем систему координат $OXYZ$ так, чтобы плоскость OYZ совпадала с плоскостью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ так, чтобы вектор $\overline{a}$ находился на оси OY и имел положительное направление (рис. 2.3.1, a, b).

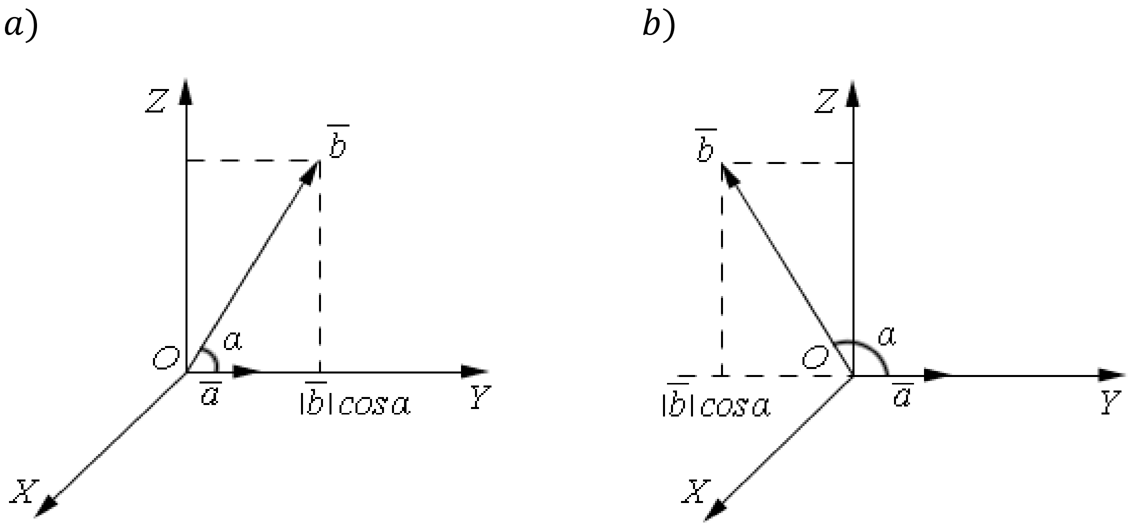


Рис. 2.3.1

Такую же конфигурацию мы могли получить и в старом базисе, развернув надлежащим образом плоскость P, в которой находятся векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. В любом случае (в выбранной системе координат, или после поворота плоскости P) координатами вектора $\overline{a}$ будут числа $x_a = 0$, $y_a = |\overline{a}|$ и $z_a = 0$, а координатами вектора $\overline{b}$ – числа $z_a = 0$, $y_b = |\overline{b}| \cdot \cos\alpha$, $z_b = |\overline{b}| \cdot \sin\alpha$, $z_b = 0$, где α – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. По определению скалярного произведения имеем

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = |\overline{a}||\overline{b}| \cdot \cos\alpha$$

и теорема доказана.

2.3.3. Приложения

Следствие 2.3.5. *Угол α между ненулевыми векторами $\overline{a}, \overline{b}$ из R_3 находится по формуле*

$$\alpha = \arccos \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

где x_a, y_a, z_a и x_b, y_b, z_b — координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в ортонормированном базисе. В частности, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны в том и только в том случае, когда

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0.$$

Пример. Найти угол между векторами $\overline{a}(1; 1; 1)$ и $\overline{b}(1; 1; 0)$ (угол между диагональю куба и его нижней гранью (рис.2.3.2)).

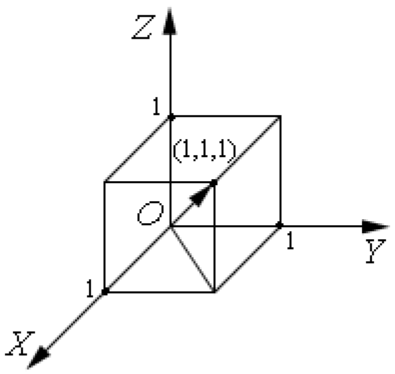


Рис. 2.3.2

Решение. По следствию 1

$$\alpha = \arccos\frac{1+1+0}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+1+0}} = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3} \cong 35°$$

Замечание 2.3.6. *Скалярное произведение в евклидовом пространстве L позволяет наделить его геометрическими свойствами. Так, например, длина вектора в* $L = R_n$ *и угол между векторами вычисляются по формулам*

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad \alpha = \arccos\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$$

Евклидовы пространства хорошо изучены и имеют разнообразные применения в науке и технике. Заметим также, что скалярное произведение является частным случаем, так называемых билинейных форм.

2.4. Векторное произведение

2.4.1. Определение векторного произведения

Определение 2.4.1. *Пусть* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *– произвольные пространства* R_3. *Векторным произведением векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *называется третий вектор* $\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b} = [\overline{a},\overline{b}]$ (*см. рис.2.4.1*)*, такой что*

1) $\overline{c}$ *перпендикулярен векторам* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$*;*

2) $|\overline{c}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\alpha$ *, где* α *– угол между векторами* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$*;*

3) $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$ *– правая тройка векторов, т.е. вектор* $\overline{c}$ *направлен так, что если поместить начала всех векторов* $\overline{a},\overline{b}$ *и* $\overline{c}$ *в одну точку и*

смотреть из конца вектора $\overline{c}$, *то кратчайший поворот от вектора* $\overline{a}$ *к вектору* $\overline{b}$ *будет виден против часовой стрелки.*

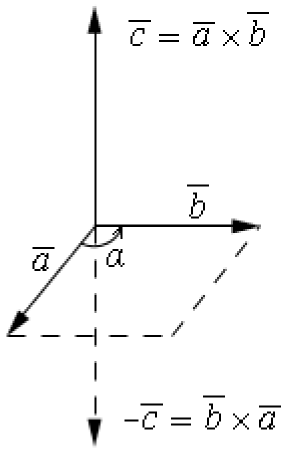


Рис. 2.4.1

Пример. *Найти векторные произведения орт* $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ (*рис* 2.4.2).

Решение. Так как $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1, \sin 0 = 0,\ \ \sin 90^\circ = 1$, то

$$\overline{i} \times \overline{i} = \overline{j} \times \overline{j} = \overline{k} \times \overline{k} = 0;$$

$$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k};\ \ \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}; \overline{k} \times \overline{i} = \overline{j};$$

$$\overline{j} \times \overline{i} = -\overline{k}; \overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i};\ \overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}.$$

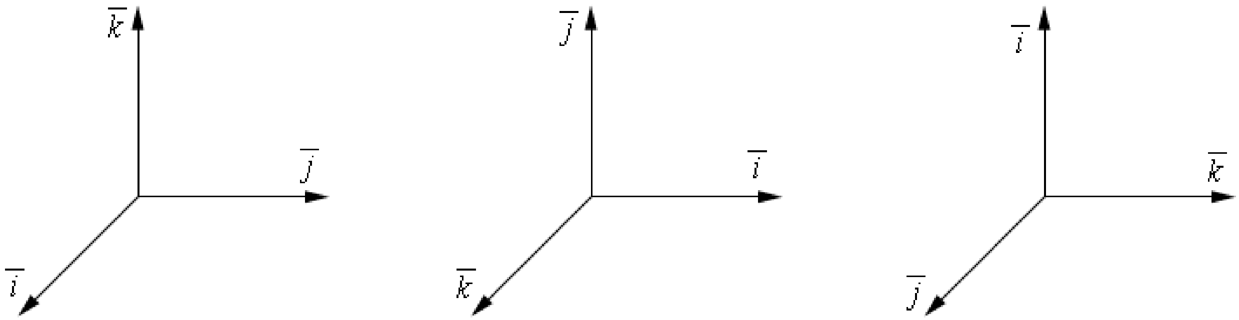


Рис. 2.4.2

2.4.2. Свойства векторного произведения

Теорема 2.4.2. *Для любых векторов* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in R_3$ *и произвольного числа* $\alpha \in R$ *справедливы следующие свойства.*

1) $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$, *тогда и только тогда, когда векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *коллинеарны.*

2) *Длина вектора* $\overline{a} \times \overline{b}$ *численно равна площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

3) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ – *антикоммутативность умножения.*

4) $\overline{a} \times \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = (\overline{a} \times \overline{c}) + (\overline{a} \times \overline{c})$ – *дистрибутивность умножения.*

5) $(\alpha\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(\alpha\overline{b}\right) = \alpha\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$.

Доказательство. 1) Утверждение очевидно, когда один из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ нулевой. Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $\overline{b} \neq \overline{0}$, то $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ тогда и только тогда, когда $\sin\alpha = 0$, где α – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Отсюда $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ и, значит, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

2) Вытекает из условия 2 определения 2.4.1 и известной формулы площади параллелограмма $S = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\alpha$.

Свойства 3–4 рекомендуется доказать самостоятельно. Свойство 5 примем без доказательств. Из свойств 4–5 вытекает, что

$$\left(\sum_m \alpha_m\overline{a}_m\right) \times \left(\sum_n \beta_n\overline{b}_n\right) = \sum_m \sum_n \alpha_m\beta_n\left(\overline{a}_m \times \overline{b}_n\right) \tag{5}$$

Теорема 2.4.3. Если $\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}, \overline{b} = x_b\overline{i} + y_b\overline{j} + z_b\overline{k}$, то

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{i}\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Доказательство. Используя формулу (5) и пример 7, последовательно получаем

$$\begin{aligned}
\overline{a} \times \overline{b} &= \left(x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}\,\right) \times \left(x_b\overline{i} + y_b\overline{j} + z_b\overline{k}\right) = \\
&= x_ax_b\left(\overline{i} \times \overline{j}\right) + x_ay_b\left(\overline{i} \times \overline{j}\right) + x_az_b\left(\overline{i} \times \overline{k}\right) + \\
&+ y_ax_b\left(\overline{j} \times \overline{i}\right) + y_ay_b\left(\overline{j} \times \overline{j}\right) + y_az_b\left(\overline{j} \times \overline{k}\right) + \\
&+ z_ax_b\left(\overline{k} \times \overline{i}\right) + z_ay_b\left(\overline{k} \times \overline{j}\right) + z_az_b\left(\overline{k} \times \overline{k}\right) = \\
&= x_ay_b\overline{k} - x_az_b\left(\overline{j} - y_ax_b\overline{k} + y_az_b\overline{i} + z_ax_b\overline{j} - z_ay_b\overline{i}\right) = \\
&= (y_az_b - z_ay_b)\overline{i} - (x_az_b - z_ax_b)\overline{j} + (x_ay_b - y_ax_b)\overline{k} = \\
&= \overline{i}\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.4.3. Приложения векторного произведения

Пример. Найти площадь треугольника ABC, если $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$ (рис 2.4.3).

Решение. По свойству 2 теоремы 2.4.2 получаем

$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$.

Находим векторы $\overline{AB} = (2;3;4) - (1;1;1) = (1;2;3)$ и $\overline{AC} = (4;3;2) - (1;1;1) = (3;2;1)$ и по теореме 2.4.3 вычисляем их векторное произведение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 8\bar{j} - 4\bar{k}.$$

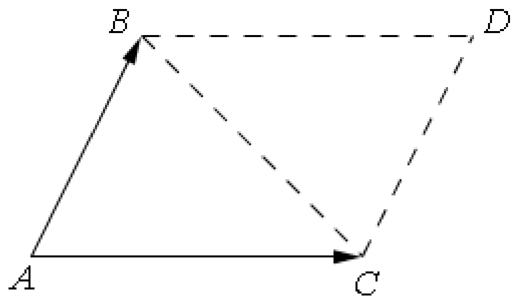


Рис. 2.4.3

Используя формулу (4), находи $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{96} = 2\sqrt{6}$ кв. ед.

Замечание 2.4.4. *Линейное пространство* R_3 *относительно векторного произведения является алгеброй Ли* (*Софус Ли – норвежский математик 19-го века*). *В общей теории алгебр Ли изучаются алгебры произвольных размерностей* (*конечных и бесконечных*). *Так, например, некоторые алгебры Ли с базисами, очень похожими на базис* $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, *имеют размерности* $3, 6, 10, \dots, \frac{n(n-1)}{2}, \dots$ (*А.И. Созутов, Сибирский математический журнал, 1993г. стр. 893-901*).

2.5. Смешанное произведение

2.5.1 Определение и свойства смешанного произведения

Определение 2.5.1. Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ – произвольные векторы пространства R_3. Смешанным произведением векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = D(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$.

Теорема 2.5.2. Если $\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}$, $\overline{b} = x_b\overline{i} + y_b\overline{j} + z_b\overline{k}$, и $\overline{c} = x_c\overline{i} + y_c\overline{j} + z_c\overline{k}$, то

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Доказательство. По теореме 2.4.3.

$$\overline{d} = \overline{b} \times \overline{c} = \overline{i}\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix}.$$

Умножая скалярно вектор $\overline{a}$ на вектор $\overline{d}$, получаем

$$(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{d} = x_a\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - y_a\begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + z_a\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана

Теорема 2.5.3. Справедливы следующие свойства:

1) $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) > 0$ тогда и только тогда, когда $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ – правая тройка;

2) Число $|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})|$ равно объему параллелепипеда, ребрами которого являются векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$;

3) $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны;

4) $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{a}) = \overline{c} \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) = -\overline{a} \cdot (\overline{c} \times \overline{b}) =$

$= -\overline{c} \cdot (\overline{b} \times \overline{a}) = -\overline{b} \cdot (\overline{a} \times \overline{c})$.

Доказательство. 1) скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{d} = \overline{b} \times \overline{c}$ положительно только в том и только том случае, если угол между этими векторами меньше $90°$ (см.теорему 2.3.4), и теперь достаточно обратиться к рисунку 2.5.1, а. (2.5.2,а).

2) объем V параллелепипеда (см.рис. 2.5.1 b (2.5.2, b)) вычисляется по формуле: $V = H \cdot S_{OBCD}$. По теореме 2.4.3 $S_{OBCD} = \left|\overline{d}\right|$, где $\overline{d} = \overline{b} \times \overline{c}$. Далее, высота H параллелепипеда очевидно равна $|\overline{a}| \cdot \cos\alpha$, где α – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{d}$. Таким образом, используя теорему 2.4.3, получаем

$$V = |\overline{a}| \cdot |\cos\alpha| \cdot \left|\overline{d}\right| = \left|\overline{a} \cdot \overline{d}\right| = \left|\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)\right|.$$

3) легко следует из второго утверждения теоремы.

4) вытекает из того, что если, например, первые три тройки векторов из утверждения правые, то последние три тройки– левые.

Теорема доказана.

$a)$ $b)$

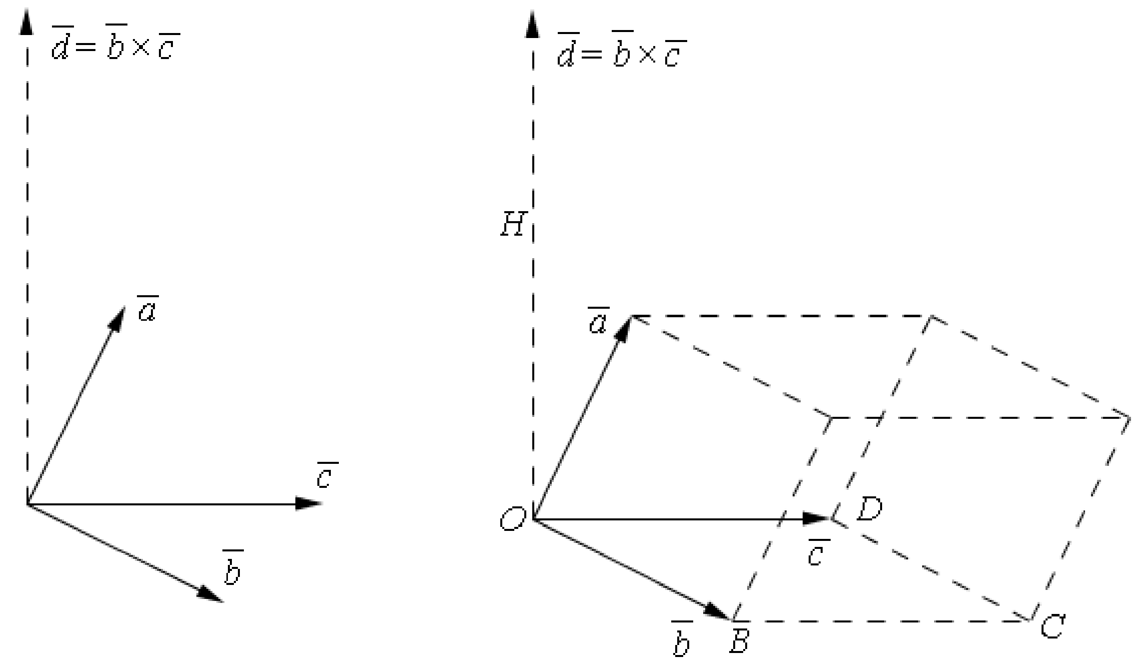


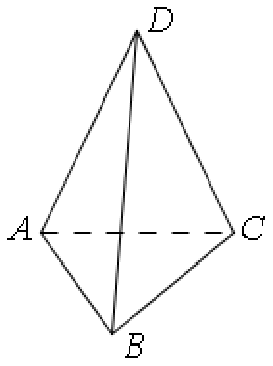
Рис. 2.5.1

2.5.2. Приложения смешанного произведения

Пример. Найти объем пирамиды $ABCD$, если $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$, $D(5;7;8)$.

Решение. Построим схематический чертеж (рис. 2.5.2)

$a)$ $b)$



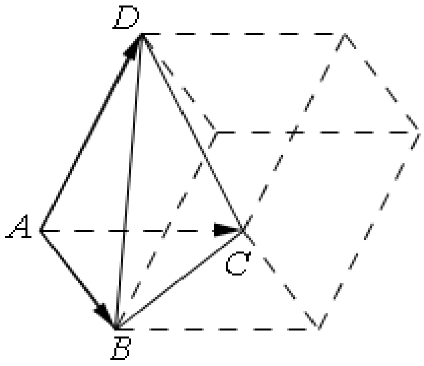


Рис. 2.5.2

Как упоминалось выше, объем пирамиды V_{ABCD} равен $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда V, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ (рис.2.5.2, b).

По теореме 2.5.3, $V = \left|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right|$. Находим векторы

$\overline{AB} = (2;3;4) - (1;1;1) = (1;2;3)$

$\overline{AC} = (4;3;2) - (1;1;1) = (3;2;1)$

$\overline{AD} = (5;7;8) - (1;1;1) = (4;6;7)$

И используя теорему 2.5.2 вычисляем их смешанное произведение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 4 + 8 \cdot 6 - 4 \cdot 7 = 4.$$

Таким образом, $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$ куб.ед.

Пусть $L = R_n$ – евклидово пространство и $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ – произвольные векторы из n. Как известно $[1-3]$, если определить $\Delta = D(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n)$, составленный из векторов-строк $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ отличен от 0, то векторы $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ линейно независимы и образуют базис в R_n. Выясним геометрический смысл смешанного произведения в R_2.

Теорема 2.5.4. *Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ – произвольные векторы из R_2 и $D(\overline{a}, \overline{b})$ – их смешанное произведение. Справедливы следующие утверждения:*

1) $D(\overline{a},\overline{b}) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\{\overline{a},\overline{b}\}$ *– правая двойка векторов, т.е. кратчайший поворот от вектора* $\overline{a}$ *к вектору* $\overline{b}$ *происходит против часовой стрелки;*

2) *Число* $|(\overline{a},\overline{b})|$ *равно площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы* $\overline{a},\overline{b}$*;*

3) $D(\overline{a},\overline{b}) = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* $\overline{a},\overline{b}$ *коллинеарны;*

4) $D(\overline{a},\overline{b}) = -D(\overline{b},\overline{a})$.

Доказательство. Совместим нашу плоскость с координатной плоскостью OXY трехмерного пространства. Тогда двумерные векторы $\overline{a} = (x_a, y_a)$ и $\overline{b} = (x_b, y_b)$ являются и трехмерными векторами, причем $\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + 0 \cdot \overline{k}$, $\overline{b} = x_b\overline{i} + y_b\,\overline{j} + 0 \cdot \overline{k}$. Вычислим их векторное произведение по формуле из теоремы 2.4.3:

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & 0 \\ x_b & y_b & 0 \end{vmatrix} = \overline{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = D(\overline{a},\overline{b}) \cdot \overline{k}.$$

По теореме 2.4.2 площадь параллелограмма со сторонами $\overline{a},\overline{b}$ равна $|\overline{c}| = |D(\overline{a},\overline{b})|$ и утверждение 2 теоремы доказано.

Согласно определению 2.4.1 если пара векторов $\overline{a},\overline{b}$ правая, то есть кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки, то вектор $\overline{c}$ будет направлен «вверх» и, значит, его координата $z_c = D(\overline{a},\overline{b})$ – положительное число. Следовательно, утверждение 1 теоремы верно.

Далее, $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны (утверждение 2 теоремы 2.4.2). Наконец, из свойства 3 теоремы 2.4.2 вытекает последнее утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание 2.5.5. *Если* $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ *– векторы пространства* R_n *, то модуль определителя* $\Delta = D(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n)$ *равен объему* n *-мерного параллелепипеда, ребрами которого являются векторы* $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$*. При этом знак определителя* Δ *совпадает с «левой» или «правой» ориентацией системы векторов* $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$*. Поэтому смешанное произведение* $D(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n)$ *в общем случае часто называют смешанным объемом.*

Глава 3. Линейное пространство

3.1. Определение линейного пространства

Введем понятие линейного или векторного пространства. Пусть имеется множество L элементов произвольной природы, которые будем обозначать строчными латинскими буквами со стрелочками $\overline{a}, \overline{b}, \dots, \overline{x}, \overline{y}, \dots$. Вместе с элементами множества L будем рассматривать действительные числа (а также рациональные, комплексные и др., составляющие поле), для обозначения которых воспользуемся малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \dots$

Определение 3.1.1. *Множество L называется линейным пространством, если:*

1) *любым двум элементам $\overline{x}, \overline{y}$ из L однозначно ставится в соответствие некоторый элемент того же множества L, называемый их суммой; сумма элементов $\overline{x}, \overline{y}$ обозначается через $\overline{x} + \overline{y}$;*

2) *любому числу α и любому элементу $\overline{x}$ из L однозначно ставится в соответствие некоторый элемент того же множества L , называемый произведением α на $\overline{x}$ или $\overline{x}$ на α ; произведение обозначается через $\alpha\overline{x}$ или $\overline{x}\alpha$;*

3) *для любых элементов $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ из L и для любых чисел α и β выполнены следующие аксиомы:*

   а) *коммутативность (перестановочность): $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;*

   б) *ассоциативность (сочетательность): $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$;*

   в) *в L существует элемент $\overline{0}$ такой, что для любого $\overline{x} \in L$ выполняется $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$. Элемент $\overline{0}$ называется нулевым;*

   г) *для любого элемента $\overline{x} \in L$ существует элемент $\overline{y} \in L$ такой, что*
   $\overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$. Элемент $\overline{y}$ называется противоположным для $\overline{x}$ и обозначается через $-\overline{x}$;

   д) *ассоциативность: $(\alpha\beta)\overline{x} = \alpha(\beta\overline{x})$;*

   е) *произведение любого элемента $\overline{x}$ на число 1 равно $\overline{x}$: $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$;*

ж) *дистрибутивность для числового сомножителя:* $\alpha(\overline{x}+\overline{y}) = \alpha\overline{y} + \alpha\overline{x}$*;*

з) *дистрибутивность для сомножителя из* L*:* $(\alpha+\beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \ \beta\overline{x}$.

Элементы линейного пространства принято также называть векторами, а само линейное пространство — векторным.

Из аксиом а) – з) следует, что выражения, содержащие векторы из L, можно преобразовывать, как обычные многочлены (раскрывать скобки, приводить подобные и т.д.).

Подчеркнем, что линейные пространства можно рассматривать над любым числовым полем, а не только над полем действительных чисел. Так, например, поле R действительных чисел является линейным пространством над полем Q рациональных чисел. Но мы в дальнейшем будем рассматривать только действительные пространства, имея в виду, что большинство вводимых понятий и доказываемых утверждений справедливы и для линейных пространств над произвольным полем.

Приведем другие примеры линейных пространств.

Пример.

1. Множество всех упорядоченных пар (x, y) действительных чисел x, у с операциями сложения и умножения на число:

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1),$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

2. Множество всех конечных последовательностей фиксированной длины n, составленных из действительных чисел, с операциями

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha\, x_2, \dots, \alpha x_n).$$

   Данное линейное пространство называется арифметическим пространством векторов-строк длины n и обозначается R^n. Нетрудно сообразить, что наряду с пространством строк можно рассмотреть и арифметическое пространство векторов-столбцов длины n.

3. Множество всех свободных векторов плоскости (трехмерного пространства) с обычными операциями сложения и умножения на число.

4. Множество всех матриц с действительными элементами относительно операций сложения и умножения матриц на число.

5. Множество $R_n[x]$ всех многочленов степени $\leq n$ с коэффициентами из R.

6. Множество $R[x]$ всех многочленов с коэффициентами из R.

7. Множество всех действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ числовой оси.

8. Множество $L[a, b]$ всех непрерывных на $[a, b]$ действительных функций.

Определение 3.1.2. *Непустая совокупность U векторов какого-нибудь линейного пространства L называется линейным подпространством этого пространства, если выполняются следующие условия:*

1) *если U содержит какой-нибудь вектор $\overline{a}$, то U содержит и все кратные $\alpha\overline{a}$, где α – действительное число;*

2) *если U содержит какие-нибудь векторы $\overline{a}, \overline{b}$, то U содержит и их сумму $\overline{a} + \overline{b}$.*

Легко видеть, что эти два условия равносильны одному: *если U содержит какие-нибудь векторы $\overline{a}, \overline{b}$, то U содержит и любую их линейную комбинацию $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.*

3.2.Линейно независимые системы векторов, базисы

Пусть $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ – векторы, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$– некоторые действительные числа. Выражение $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \dots + \alpha_n\overline{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Определение 3.2.1 *Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ из R^n называются линейно независимыми* (*система этих векторов линейно независима*), *если равенство*

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \dots + \alpha_n\overline{a}_n = 0 \tag{1}$$

выполняется только для чисел $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае эти векторы называются линейно зависимыми (система векторов линейно зависима). Таким образом, если имеет место равенство (1), в котором не *все числа* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *равны* 0, *то векторы* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ *называются линейно зависимыми.*

Например, легко убедиться, что векторы $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ линейно независимы, а векторы $\overline{a} = (1,0,1)$, $\overline{b} = (-2,1,0)$, $\overline{c} = (1,-1,1)$, $\overline{d} = (1,-1,3)$ линейно зависимы, так как $\overline{a} + \overline{b} + 2\overline{c} - \overline{d} = \overline{0}$. Читателю рекомендуется проверить последнее равенство.

Предположим, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ линейно зависимы, т.е. для них можно составить равенство (1), в котором не все числа α_i, равны 0, например, $\alpha_1 \neq 0$.Тогда

$$\overline{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{a}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overline{a}_n,$$

т.е. вектор $\overline{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов. Обратно, если вектор $\overline{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов $\overline{a}_1 = \beta_2\overline{a}_2 + \cdots + \beta_n\overline{a}_n$, то

$$-\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + \cdots + \beta_n\overline{a}_n = \overline{0},$$

т.е. векторы $\overline{\mathrm{a}}_1, \overline{\mathrm{a}}_2, \dots, \overline{\mathrm{a}}_\mathrm{n}$, линейно зависимы. Таким образом, мы доказали лемму.

Лемма 3.2.2 *Векторы* $\overline{\mathrm{a}}_1, \overline{\mathrm{a}}_2, \dots, \overline{\mathrm{a}}_\mathrm{n}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных векторов.*

Докажите самостоятельно следующую лемму.

Лемма 3.2.3 *Если среди векторов* $\overline{\mathrm{a}}_1, \overline{\mathrm{a}}_2, \dots, \overline{\mathrm{a}}_\mathrm{n}$ *находится вектор* $\overline{0}$, *то они линейно зависимы.*

Обратимся к свойствам систем векторов арифметического пространства R^n (пункт 2 из примера).

Теорема 3.2.4 *Если определитель* Δ, *столбцами* (*или строками*) *которого являются векторы* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ *из* R^n *отличен от* 0, *то для любого вектора* $\overline{\mathrm{b}}$ *из* R^n *векторное уравнение*

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \cdots + x_n\overline{a}_n = \overline{b} \tag{2}$$

имеет в точности одно решение. В частности, $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ *– линейно независимая система векторов.*

Доказательство. Пусть $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и $\overline{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ для $1 \leq i \leq n$. Запишем в равенстве (2) векторы $\overline{a}_i$**,** в виде столбцов:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Приравнивая соответствующие координаты, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть A – матрица системы. Тогда $\Delta = |A^T| \neq 0$ и по свойству определителей $|A| = |A^T| = \Delta \neq 0$. По теореме Крамера система (3) разрешима и имеет единственное решение. В частности, при $\overline{b} = \overline{0}$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и по определению (3.2.1) векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ линейно независимы. Теорема доказана.

Теорема 3.2.5 *Векторы* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ *из* R^n *линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель* Δ, *составленный из координат этих векторов, отличен от* 0.

Доказательство. Если $\Delta \neq 0$, то теорема следует из теоремы 3.2.4.

Пусть векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, линейно независимы и Δ – составленный из них определитель. Предположим, что $\Delta = 0$. Тогда приводя определитель Δ к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк, мы на некотором шаге получим в нем нулевую строку с номером k. Это означает, что данная строка является линейной комбинацией других строк. Но тогда по лемме 3.2.2 строки определителя Δ, т.е. векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ линейно зависимы, что противоречит условиям теоремы. Значит, наше предположение неверно и $\Delta \neq 0$. Теорема доказана.

Пример. Являются ли линейно независимыми системы векторов $\{(2,0,-3), (3,5,0), (-1,0,2)\}$ и$\{(2,3,4), (1,2,2), (4,7,8)\}$.

Решение. Составим определители из координат этих векторов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Вычислим Δ_1и Δ_2:

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = 5 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0.$$

Поскольку $\Delta_1 \neq 0$, первая тройка векторов линейно независима. Напротив, вторая тройка векторов линейно зависима, так как $\Delta_1 = 0$.

Введем понятие базиса.

Определение 3.2.6. *Базисом* (*базой*) *линейного пространства называется упорядоченная система векторов* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots$ (*конечная или бесконечная*)*, которая удовлетворяет следующим требованиям:*

1) *векторы системы линейно независимы;*

2) *каждый вектор* $\overline{x}$ *пространства есть линейная комбинация векторов этой системы, т.е.* $\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \cdots$*, в которой только конечное число коэффициентов* α_i*, отлично от* 0.

В этом случае говорят, что вектор $\overline{x}$ *разложен по базису* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots$ *Коэффициенты разложения* $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots$ *называют координатами вектора* $\overline{x}$*в базисе* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots$

В определении сказано, что базис – упорядоченная система векторов. Это означает, что каждому вектору в базисе приписан определенный номер. Поэтому из одной и той же системы векторов можно получить разные базисы, по-разному нумеруя векторы.

Линейные пространства, для которых существуют базисы, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечномерными.* Линейные пространства, все базисы которых бесконечны, называются *бесконечномерными.*

Теорема 3.2.7. *Пусть* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots$ *– базис линейного пространства* L. *Тогда*

1. *Координаты любого вектора* $\overline{x} \in L$ *по базису* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots$ *определяются однозначно.*

2. *Два вектора из* L *равны тогда и только тогда, когда равны их координаты, стоящие на одинаковых местах.*

3. *Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых.*

4. *Координаты произведения вектора на число α равны произведению координат этого вектора на число α.*

Доказательство. 1. Предположим $\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \dots$, $\overline{x} = \beta_1\overline{e}_1 + \beta_2\overline{e}_2 + \dots$, – два различных разложения вектора $\overline{x} \in L$ по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots$ Рассматривая их разность, получим

$$(\alpha_1 - \beta_1)\,\overline{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{e}_2 + \dots = \overline{x} - \overline{x} = \overline{0},$$

причем не все коэффициенты $(\alpha_i - \beta_i)$ из правой части равны 0. Но это противоречит определению базиса. Следовательно, утверждение 1 верно.

Остальные утверждения теоремы рекомендуем доказать самостоятельно.

В дальнейшем мы будем в основном рассматривать пространства с конечным базисом Векторы базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ линейного пространства L и координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ векторах $\overline{x} \in L$ в этом базисе будем записывать в строку:

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n) = \overline{e}, \qquad \overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\,).$$

Теорема 3.2.7 по сути утверждает, что пространство L с базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ можно отобразить на арифметическое пространство R^n векторов-строк, составленных из координат векторов L в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$. На основании теоремы 3.2.7 при данном отображении каждому вектору $\overline{x} \in L$ соответствует точно один вектор-строка (образ) из R^n, а каждому вектору-строке из R^n – точно один вектор из L, сумма векторов из L отображается на сумму их образов, а произведению вектора из L на число α соответствует произведение его образа на число α. При этом понятно, что в R^n сложение векторов и умножение вектора ни число производится покоординатно. По терминологии современной алгебры вышеперечисленное означает, что линейные пространства L и R^n изоморфны (и имеют с алгебраической точки зрения одинаковое строение). Более детально,

$$\begin{gathered}\overline{e}_1 \leftrightarrow (1, 0, 0, \dots, 0),\\ \overline{e}_2 \leftrightarrow (0, 1, 0, \dots, 0),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \overline{e}_1 \leftrightarrow (0, 0, 0, \dots, 1).\end{gathered}$$

Если

$$\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ \dots + \alpha_n\overline{e}_n = \overline{0},$$

то ввиду указанного выше соответствия

$$\alpha_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + \alpha_2 \cdot (0,1, \dots, 0) + \ \dots + \alpha_n \cdot (0, 0, \dots, 1) = (0,0, \dots ,0)$$

или

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$ и в силу теоремы 3.2.7 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$

Таким образом, векторы-строки, соответствующие векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ линейно независимы, причем любой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ арифметического пространства R^n может быть представлен в виде их линейной комбинации:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + \alpha_2 \cdot (0,1, \dots, 0) + \ \dots + \alpha_n \cdot (0, 0, \dots, 1).$$

Значит, векторы-строки, соответствующие базисным векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ из L**,** также составляют базис арифметического линейного пространства R^n Также легко убедиться, что нулевому вектору $\overline{0}$ из L соответствует в R^n однозначно определенный вектор-строка $(0,0, \dots ,0)$.

3.3. Полярные координаты

На плоскости чаще всего используется декартова прямоугольная система координат Oxy (Oij), где i, j – орты. При этом координаты точки $M(x, y)$ совпадают с координатами вектора $\overline{OM}$ в базе i, j. Но иногда более удобными являются другие способы определения положения точек с помощью чисел. В <u>полярной системе координат</u> положение точки $M \neq 0$ определяется двумя числами: $r = |\overline{OM}|$ – полярный радиус и φ – полярный угол (см. рис 3.3.1).

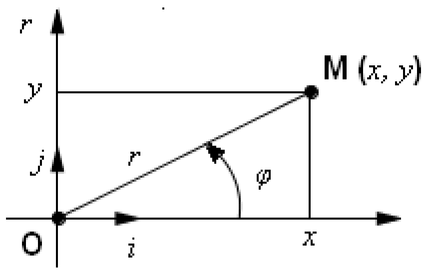


Рис. 3.3.1

Для точки O угол φ не определен, $r = 0$. Иногда считают, что $0 \leq \varphi < 2\pi$. Тогда каждой точке $M \neq 0$ однозначно соответствует $r > 0$ и φ. Чаще предполагается, что φ определен с точностью до $2\pi k$, где k – целое число. Очевидна связь между декартовыми и полярными координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} r = r\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Пример. Найти координаты точки $M(1, -\sqrt{3})$ в полярных координатах.

Решение. Находим r и φ:

$$r = \sqrt{1+3} = 2, \cos\varphi = \frac{1}{2}, \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда выводим, что $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$. Итак, в полярных координатах $M\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

Пример. Найти уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ в полярных координатах.

Решение. Имеем $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2$, $r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2, r^2 = a^2, r = a$ – искомое уравнение.

3.4. Плоскость

Пусть $Oxyz$ – декартовая прямоугольная система координат. Положение плоскости P в пространстве определяется заданием её точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевого вектора $\overline{n}$, перпендикулярного P. Каждый такой вектор называется нормальным вектором плоскости P. Обозначим $\overline{r}_0 = \overline{OM}_0$, $\overline{r} = (x, y, z)$ – радиус вектор производной точки $M(x, y, z)$. Очевидно, что $M \in P \Leftrightarrow (\overline{n}, \overline{r} - \overline{r}_0) = 0$. В силу теоремы 2.3.5, отсюда мы получаем уравнение плоскости P с нормальным вектором n и проходящей через точку M_0:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.1}$$

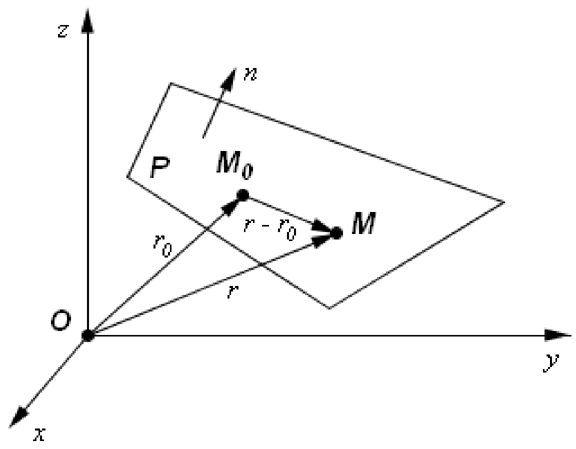


Рис. 3.4.1

Теорема 3.4.1. *Уравнение*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.2}$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, *задает в пространстве некоторую плоскость и наоборот, всякая плоскость в пространстве задается уравнением вида* (4.2).

Доказательство. Любая плоскость задается уравнением вида (4.1). Раскрывая скобки в левой части этого уравнения, получим уравнение вида (4.2). Обратно, покажем, что уравнения (4.2) определяет некоторую плоскость. Пусть, например, $C \neq 0$. Запишем уравнение в виде

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0.$$

Это уравнение вида (4.1), которое задает плоскость, проходящей через точку $M_0\left(0,0,-\frac{D}{C}\right)$ и имеющей нормальный вектор (A, B, C). Предложение доказано.

Уравнение (4.2) называется общим уравнением плоскости.

Замечание 3.4.2. *Если в уравнении* (4.2) $D = 0$, *то плоскость проходит через начало координат. Если* $A = 0$, *то плоскость параллельна оси* Ox. *При* $A = B = 0$ *плоскость параллельна плоскости* Oxy. *Аналогично устанавливается положение плоскости при* $B = 0$ ($C = 0$).

Замечание 3.4.3. *Пусть плоскости* P_1 *и* P_2 *определяются уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

1. *P_1 и P_2 параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны, т.е.* $(A_1, B_1, C_1) = \alpha(A_2, B_2, C_2)$.

2. *Угол φ между P_1 и P_2 равен углу между их нормальными векторами, а значит, по следствию теоремы* 2.3.5

$$cos\,\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, P_1 перпендикулярна P_2 $\Leftrightarrow$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Предложение 3.4.4. *Если плоскость P задается уравнением* (4.2), *то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P находится по формуле*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.3)$$

Доказательство. Действительно, пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – ортогональная проекция M_0 на плоскость P. Тогда вектор $\overline{M_1M_0}$ коллинеарен нормальному вектору $\overline{n} = (A, B, C)$. Следовательно, $|\overline{n}, \overline{M_0M_1}| = |\overline{n}|d = |A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|$. Отсюда и из равенства $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$ $(M_1 \in P)$ получаем (4.3). Предложение доказано.

Пример. Найти уравнение плоскости P, проходящей через точки $R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $S(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $T(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, не лежащие на одной прямой.

Решение. Легко понять, что $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overline{RM}, \overline{RS}, \overline{RT}$ – компланарные векторы $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - \alpha_1 & y - \beta_1 & z - \gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 & \beta_2 - \beta_1 & \gamma_2 - \gamma_1 \\ \alpha_3 - \alpha_1 & \beta_3 - \beta_1 & \gamma_3 - \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим уравнение плоскости P.

3.5. Прямая в пространстве

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (5.1)$$

$A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0$ $(i = 1,2)$, каждое из которых задает плоскость. Если эти плоскости не параллельны, то система 5.1 определяет прямую; уравнения (5.1) это общие уравнения прямой.

Пусть L – прямая в пространстве, $\overline{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – ненулевой вектор, параллельный прямой L (направляющий вектор прямой L). Фиксируем точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на L и обозначим $\overline{r}_1 = \overline{OM}$, $\overline{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$. Понятно, что $M \in L$ тогда и только тогда, когда $\overline{r} - \overline{r}_1 = t\overline{s}$ для некоторого действительного числа t. Приравнивая координаты, получим параметрическое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha t, \\ y = y_1 + \beta t, \\ z = z_1 + \gamma t. \end{cases} \tag{5.2}$$

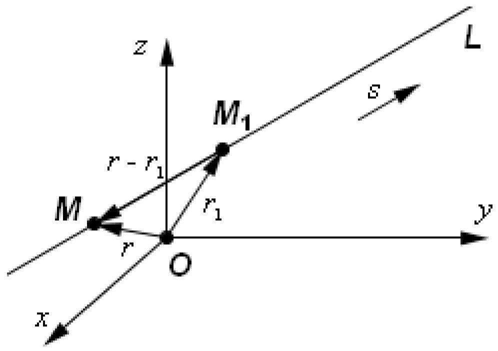


Рисунок 3.5.1

Исключая параметр t отсюда находим

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma} \tag{5.3}$$

– канонические уравнения прямой L. Если например, $\alpha = 0$, то в (5.3) допускается запись: $\frac{x - x_1}{0} = \cdots$. Ввиду (5.2) она означает, что $x = x_1$ для всех точек L (L содержится в плоскости $x = x_1$, которая перпендикулярна оси Ox).

Пример. Найти каноническое уравнение прямой L, проходящей через точку $M(1,2,3)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x + y + z + 4 = 0, \\ 2x - 3y + 4z - 6 = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Решение. Заметим, что в качестве направляющего вектора прямой L можно взять вектор $\overline{s} = \overline{s}_1 \times \overline{s}_2$, где $\overline{s}_1, \overline{s}_2$ – нормальные векторы плоскостей, которые определяются уравнениями (5.4), т.е. $\overline{s}_1 = (1,1,1)$, $\overline{s}_2 = (2,-3,4)$. Мы имеем

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 2\bar{j} - 5\bar{k}.$$

Таким образом, искомое уравнение

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{(-2)} = \frac{z-3}{(-5)}.$$

Замечание 3.5.1. *Если известны направляющие векторы* $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ *прямых* L_1 *и* L_2, *то угол* φ *между этими прямыми совпадает с углом между* $\bar{s}_1$ *и* $\bar{s}_2$, *т.е.*

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{s}_1, \bar{s}_2)}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|}.$$

В частности, L_1 *перпендикулярна* $L_2 \Leftrightarrow (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = 0$; L_1 *параллельна* $L_2 \;\Leftrightarrow\; \bar{s}_1 = \alpha\bar{s}_2$.

Замечание 3.5.2. *Пусть известны нормальный вектор* $\bar{n}$ *плоскости* P *и направляющий вектор* $\bar{s}$ *прямой* L. *Угол* φ *между прямой* L *и плоскостью* P *называется любой из двух смежных углов, образованных* L *и её проекцией на* P. *Если* ψ – *угол между векторами* $\bar{n}$ *и* $\bar{s}$ (*см. рис. 3.5.2*), *то в любом случае* $\sin\varphi = \cos\psi$. *Поэтому*

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{n}, \bar{s}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|}.$$

В частности, L *параллельна* $P \;\Leftrightarrow\; (\bar{n}, \bar{s}) = 0$; L *перпендикулярна* $P \;\Leftrightarrow\; \bar{n} = \alpha\bar{s}$.

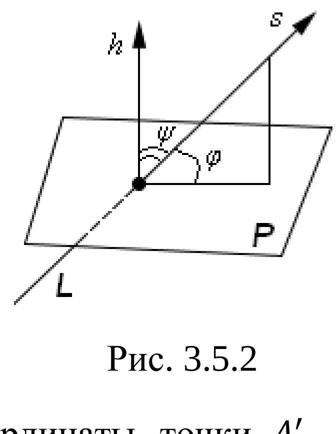


Рис. 3.5.2

Пример. Найти координаты точки A', симметричной с $A(3, -1, 1)$ относительно плоскости P, заданной уравнением

$$2x + 3y + 6z + 40 = 0.$$

Решение. Обозначим через L прямую, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости P. Так как за направляющий вектор L можно взять нормальный вектор $(2,3,6)$ плоскости P, то L определяется параметрическими уравнениями $x = 3 + 2t$, $y = -1 + 3t$, $z = 1 + 6t$ (см. 5.2). Найдем теперь параметр t, при котором L пересекает P:

$$2(3 + 2t) + 3(-1 + 3t) + 6(1 + 6t) + 40 = 0.$$

Отсюда $t = -1$, а значит, $B(1, -4, -5)$ – ортогональная проекция A на плоскость P. Пусть $A(\alpha, \beta, \gamma)$. Поскольку B – середина отрезка AA', то $\frac{\alpha+3}{2} = 1$, $\frac{\beta-1}{2} = -4$, $\frac{\gamma+1}{2} = -5$. Итак, $A'(-1, -7, -11)$.

3.6. Прямая на плоскости

Пусть Oxy – декартова прямоугольная система координат плоскости, L – прямая. Нормальным вектором прямой L называется любой ненулевой вектор $\overline{n} = (A, B)$ перпендикулярный L.

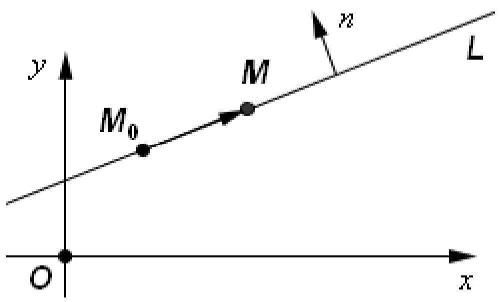


Рис. 3.6.1

Фиксируем точку $M_0(x_0, y_0) \in L$ и пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости. Очевидно (см. рис. 3.6.1), $M(x, y) \in L \Leftrightarrow (n, \overline{M_0M}) = 0$. Это равносильно уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \qquad 6.1)$$

которое задает прямую L.

Аналогично предложению 3.4.1 нетрудно установить, что уравнение

$$Ax + By + C = 0, \qquad (6.2)$$

$A^2 + B^2 \neq 0$, задает прямую и наоборот, любая прямая на плоскости задается уравнением вида (6.2), которое называется общим уравнением прямой.

Пусть прямая L задана уравнением (6.2). Если $B \neq 0$, то выражая y, получим уравнение

$$y = kx + b,$$

которое называется уравнением прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$ (см. рис 3.6.2).

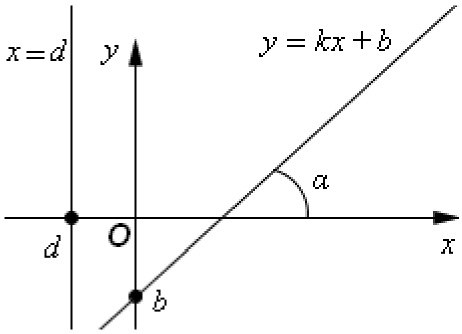


Рис. 3.6.2

Если $B = 0$, то (6.2) принимает вид $x = d$. Такая прямая L перпендикулярна оси Ox.

Пример. Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Решение. Такое уравнение имеет вид $y = kx + b$, а так как координаты M_0 удовлетворяют уравнению, то $b = y_0 - kx_0$. Поэтому уравнение искомой прямой можно записать в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $n = (y_2 - y_1, x_1 - x_2)$. Так как $\left(\overline{M_1 M_2}, \overline{n}\right) = 0$, то $\overline{n}$ – нормальный вектор прямой, а значит, согласно (6.2) её уравнение

$$(y_2 - y_1) \cdot (x - x_1) + (x_1 - x_2) \cdot (y - y_1) = 0.$$

Предложение 3.6.3. *Расстояние* d *от точки* $M_1(x_1, y_1)$ *до прямой* L, *заданной уравнением* $Ax + By + C = 0$, *находится по формуле*

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично выводу формулы (4.3) расстояние от точки до плоскости.

Замечание 3.6.4. *Пусть прямые L_1 и L_2 задаются уравнениями*

$$y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2.$$

1. *L_1 и L_2 параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\overline{n}_1 = (k_1, -1)$, $\overline{n}_2 = (k_2, -1)$ коллинеарны, т.е. $k_1 = k_2$.*

2. *Угол φ между L_1 и L_2 равен углу между их нормальными векторами, т.е.*

$$cos\,\varphi = \frac{k_1k_2 + 1}{\sqrt{k_1^2 + 1}\sqrt{k_2^2 + 1}}.$$

В частности, L_1 перпендикулярно L_2 $\Leftrightarrow$ $k_1k_2 = -1$.

3.7. Линии 2-го порядка. Эллипс

Определение 3.7.1. *<u>Линией второго порядка</u> называется такое множество точек плоскости, которое в некоторой декартовой прямоугольной системе координат Oxy задается уравнением вида*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{7.1}$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Линии второго порядка полностью классифицированы. Уравнение (7.1) может определять: пустое множество (например, уравнение $x^2 + 1 = 0$);

точку ($x^2 + y^2 = 0$); прямую ($y^2 = 0$); пару пересекающихся прямых ($x^2 - y^2 = 0$); пару параллельных прямых ($x^2 - a^2 = 0$), а также эллипс, гиперболу, параболу.

Определение 3.7.2. *Эллипсом L называется линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается каноническим уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a \geq b > 0). \tag{7.2}$$

Из этого уравнения сразу следует, что $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ для всех точек $(x, y) \in L$, т.е. эллипс целиком расположен в прямоугольнике со сторонами

$2a$ и $2b$. Точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ называются вершинами эллипса. Расстояние a, b от начала координат до вершин эллипса называются соответственно, большой и малой полуосями эллипса.

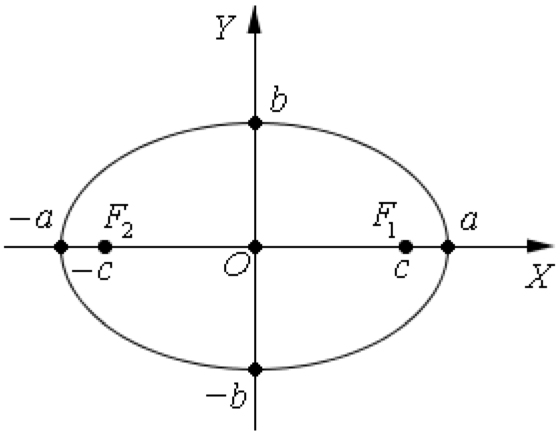


Рис.3.7.1

Очевидно, если $(x, y) \in L$, то L содержит и точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. Значит, эллипс L расположен симметрично относительно осей координат и точки $O(0,0)$, которая называется центром эллипса. Если $a = b$, то L – окружность радиуса a с центром в начале координат. В дальнейшем будем предполагать, что $a > b$. Пусть $c > 0$ и $c^2 = a^2 - b^2$. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются фокусами эллипса, а число $\epsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет эллипса. Очевидно, $\epsilon < 1$.

Теорема 3.7.3. *Если r_1, r_2 – расстояние от точки $M(x, y)$ эллипса L до фокусов F_1, F_2, то $r_1 + r_2 = 2a$.*

Доказательство. Так как координаты точки M удовлетворяет уравнение (7.2), то

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2.$$

Поэтому

$$r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2}.$$

Поскольку $a - \frac{c}{a}x > 0$ $\left(\frac{c}{a} = \epsilon < 1, x \leq a\right)$, то $r_1 = a - \epsilon x$. Подобными вычислениями можно установить, что $r_2 = a + \epsilon x$, т.е. $r_1 + r_2 = 2a$ и теорема верна.

Замечание 3.7.4. *Простыми вычислениями доказывается и обратное к теореме* 3.7.1 *утверждение, т.е. если для некоторой точки* $M(x, y)$, *плоскости выполняется равенство* $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, *то* $M \in L$ (*координаты* M *удовлетворяют уравнениям* 7.1)

3.8. Гипербола

Определение 3.8.1. *Гиперболой называется линия* S , *которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается каноническим уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8.1}$$

где $a, b > 0$.

Уравнение (8.1) содержит только квадраты x и y . Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox, Oy, а также относительно точки $O(0,0)$, которую называют центром гиперболы. Точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$ пересечение гиперболы S с осью Ox называют вершинами гиперболы. Очевидно, что для всех точек $M(x, y) \in S$ выполняется неравенство $|x| \geq a$. Поэтому гипербола состоит из двух кусков, называемых её правыми и левыми ветвями.

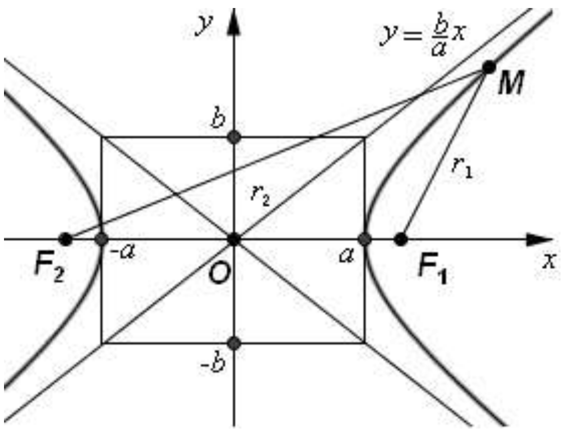


Рис. 3.8.1

Числа a и b называются соответственно вещественной и мнимой полуосями гиперболы, а прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптотами гиперболы.

Нетрудно показать, что при неограниченном удалении точки M гиперболы S от начала координат расстояние от M до асимптоты стремится к нулю. Поэтому построение гиперболы надо начинать с построения её вершин и асимптот.

Пусть $c > 0$ и $c^2 = a^2 + b^2$. Точки $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ называются фокусами гиперболы S , а $\epsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситетом S . Основное геометрическое свойство гиперболы определяет

Теорема 3.8.2. *Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости, $r_1 = |MF_1|$, $r_2 = |MF_2|$. Точка $M(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит гиперболе S, когда $|r_1 - r_2| = 2a$.*

Доказательство. Предположим, что $|r_1 - r_2| = 2a$, т.е.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Перенесем первый радикал в правую часть и возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 \ = \ 4a^2 \ + \ (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Сокращая на 4 и еще раз возводя в квадрат, получим

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2), a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2), b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Деля обе части последнего равенства на a^2b^2 , получим общее уравнение. Это и означает, что $M(x, y) \in S$.

Обратное утверждение устанавливается аналогичным вычислением при доказательстве теоремы 3.7.1.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\epsilon}$ называются директрисами гиперболы S. Обозначим через d_1 (d_2) расстояние от произвольной точки M плоскости до директрисы $x = \frac{a}{\epsilon}$ $\left(x = -\frac{a}{\epsilon}\right)$. Подобно теореме 3.8.2 включая доказательство, имеет место

Теорема 3.8.3. $M \in S \Leftrightarrow \frac{r_1}{d_1} = \epsilon$ (*или* $\frac{r_2}{d_2} = \epsilon$).

3.9. Параболы

Определение 3.9.1. *Параболой называется линия* R , *которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается каноническим уравнением*

$$y^2 = 2px, \tag{9.1}$$

где $p > 0$.

Очевидно, что для всех точек $M(x, y)$ параболы выполняется неравенство $x \geq 0$. Точка $O(0,0)$ называется *вершиной* параболы R.

Так как уравнение (9.1) содержит только квадрат y, то Ox – ось симметрии параболы R.

Точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется *фокусом* параболы, а прямая l, заданная уравнением $x = -\frac{p}{2}$, называется её *директрисой* (см. рис. 3.9.1).

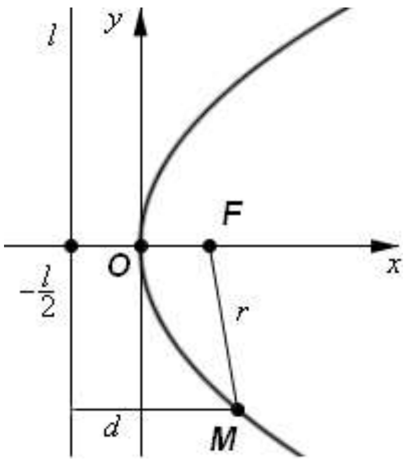


Рисунок 3.9.1

Лемма 3.9.2. *Если* r *– расстояние между точкой* $M(x, y)$ *параболы* R *и фокусом* F, *то* $r = x + \frac{p}{2}$.

Доказательство. Действительно,

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2},$$

т.к. $x \geq 0, p > 0$. Итак, лемма верна.

Теорема 3.9.3. *Пусть $M(x,y)$ – любая точка плоскости, d – расстояние между M и директрисой l, $r = |MF|$. Точка M принадлежит параболе R тогда и только тогда, когда $r = d$.*

Доказательство. Пусть $M \in R$. По лемме 3.11.1 $r = x + \frac{p}{2}$. С другой стороны, очевидно, что и $d = x + \frac{p}{2}$ (см. рис. 3.9.1). Итак, $r = d$.

Обратно. Пусть для точки $M(x,y)$ выполняется равенство $r = d$, т.е.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, мы получим

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}, y^2 = 2px,$$

т.е. $M \in R$. Теорема доказана.

Пример. Найти радиус наибольшей окружности L, лежащей внутри параболы R, заданной уравнением $y^2 = 2px$, если L касается R в точке $O(0,0)$.

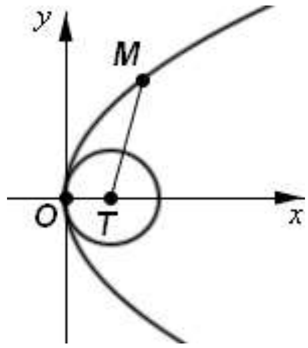


Рис.3.9.2

Решение. Пусть L лежит внутри R и касается её вершины (см. рис. 3.9.2), $T(\alpha, 0)$ – центр L. Тогда $(x-\alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$ – уравнение L. Заметим, что L лежит внутри R тогда и только тогда, когда $|TM|^2 \geq \alpha^2$ для любой точки $M(x,y) \in R$, что равносильно неравенству

$$(x-\alpha)^2 + 2px \geq \alpha^2, x^2 - 2\alpha x + 2px \geq 0, x\big(x + 2(p-\alpha)\big) \geq 0.$$

Очевидно, это выполняется при любых $x \geq 0$ только при $\alpha \leq p$. Следовательно, искомая окружность имеет радиус $\alpha = p$.

3.10. Поверхности 2-го порядка. Эллипсоид

Определение 3.10.1. *<u>Поверхностью 2-го порядка</u> называется множество точек пространства, которое в некоторой декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задано уравнением 2-го порядка.*

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \\ + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \gamma = 0, \qquad (10.1)$$

где хотя бы одно из чисел α_i $(i = 1, \dots, 6)$ отлично от нуля.

Такие поверхности полностью классифицированы и мы приведем их основные типы. Будем использовать *метод параллельных сечений* исследования формы поверхности. Суть его заключается в следующем. Если поверхность S определяется уравнением $f(x, y, z) = 0$, то решая системы

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0, \\ x = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x,y,z) = 0, \\ y = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x,y,z) = 0, \\ z = h, \end{cases}$$

мы найдем линии пересечения S соответсвенно плоскостями $x = h$, $y = h$, $z = h$. По виду этих пересечений можно судить о форме S.

Определение 3.10.2. *<u>Эллипсоидом</u> называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (10.2)$$

где $a, b, c > 0$.

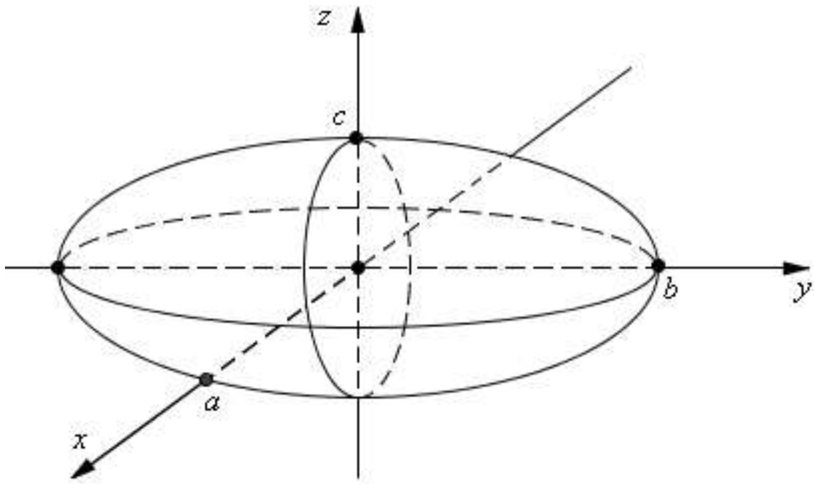


Рис. 3.10.1

Будем пересекать эту поверхность плоскостями $x = h_1$, $y = h_2$, $z = h_3$. Если $|h_1| < a$, $|h_2| < b$, $|h_3| < c$, то пересечениями являются эллипсы. Если $|h_1| = a$, $|h_2| = b$, $|h_3| = c$, то пересечениями являются точки $(\pm a, 0,0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0,0, \pm c)$. Если же $|h_1| > a$, $|h_2| > b$, $|h_3| > c$, то пересечений нет. Эллипсоид изображен на (рис 3.10.1).

3.11. Цилиндрические и конические поверхности

Определение 3.11.1. *Поверхность, состоящая из всех прямых, проходящих через данную линию L и параллельно фиксированной прямой l называется цилиндрической.*

При этом L называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а любая прямая, составляющая эту поверхность и параллельная l называется *образующей* (см. рис. 3.11.1).

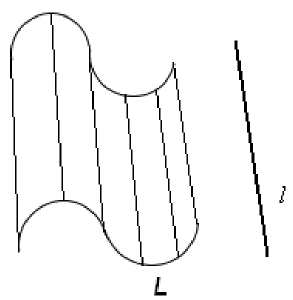


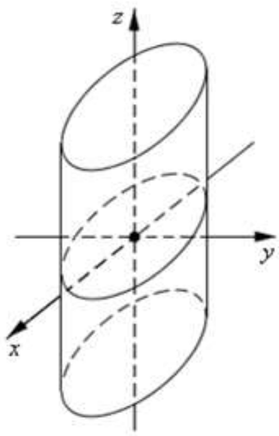
Рис. 3.11.1

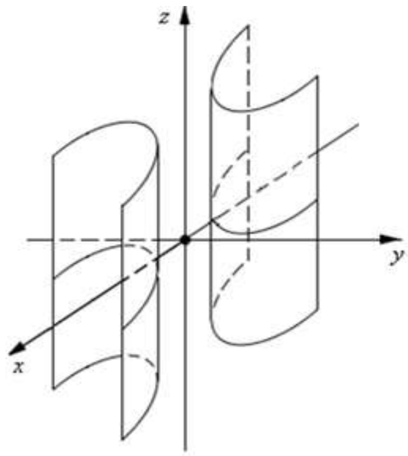
Очевидно, что уравнение $f(x, y) = 0$ задает в пространстве $Oxyz$ цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси Oz и направляющей, которая в плоскости Oxy задается тем же самым уравнением.

Так, уравнения 2-го порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=2px$$

задают в пространстве соответственно *эллиптический цилиндр*, *гиперболический цилиндр*, *параболический цилиндр* (см. рис. 3.11.2 –3.11.4).





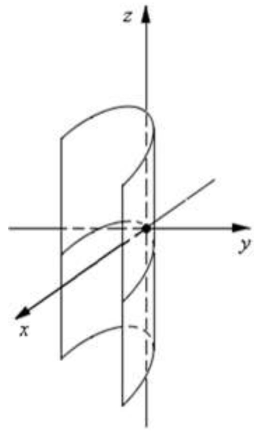


Рис. 3.11.2 Рис. 3.11.3 Рис 3.11.4

Определение 3.11.2. *Поверхность S, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и проходящих через данную точку O, называется <u>конической</u>; L – <u>направляющая</u> конической поверхности, O – <u>вершина</u>. Любая из прямых, составляющих S, называется её <u>образующей</u>.*

Пример. Найти уравнение конической поверхности S с направляющей L, определяемой системой

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c \quad (c\neq 0) \end{cases}$$

и вершиной $O(0,0,0)$.

Решение. Очевидно, точка $M(x,y,z)$ находится на поверхности S тогда и только тогда, когда M принадлежит прямой ON, где $N(\alpha,\beta,\gamma)$ является точкой направляющей L (см. рис. 3.11.5).

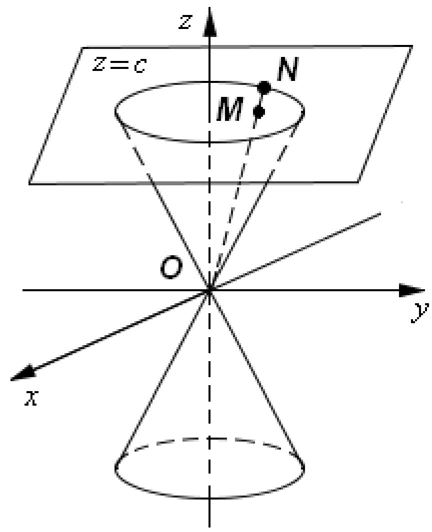


Рис. 3.11.5

Следовательно,

$$\gamma = c, \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1. \tag{11.1}$$

Так как коническое уравнение прямой ON имеет вид

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{c},$$

то подставляя $\alpha = \frac{cx}{z}, \beta = \frac{cy}{z}$, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \tag{11.2}$$

Итак, координаты любой точки $M \in S$ удовлетворяют уравнению (11.2). Обратно, нетрудно доказать, что если координаты любой точки M удовлетворяют уравнению (11.2), то $M \in S$.

Уравнение (11.2) задает *конус 2-го порядка*.

3.12. Гиперболоиды

Определение 3.12.1. *Поверхность T, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{12.1}$$

называется <u>однополосным гиперболоидом</u>.

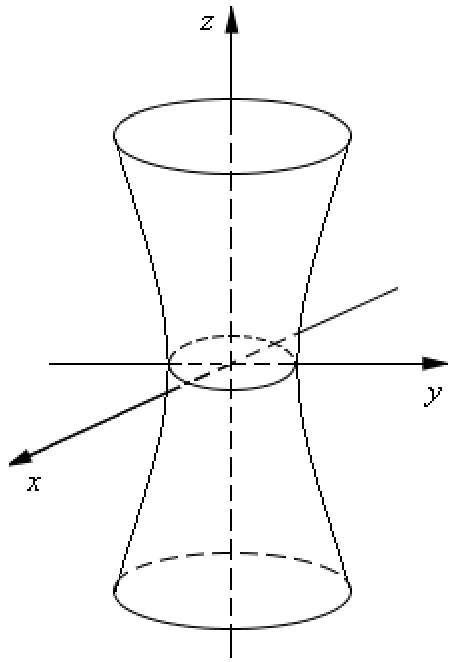


Рис. 3.12.1

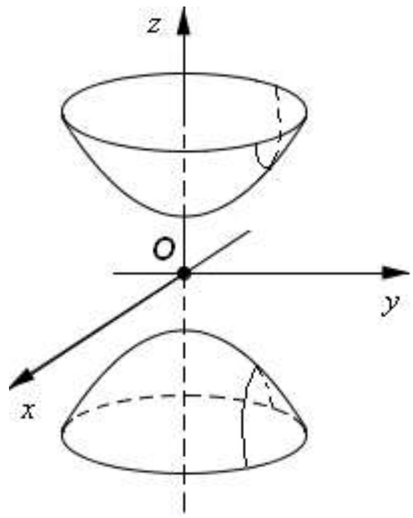


Рис. 3.12.2

Пересекая поверхность T плоскостями $z = h$, получаем эллипсы. При пересечении T плоскостями $x = h \quad (h \neq \pm a)$ и $y = h \quad (h \neq \pm b)$ получаем гиперболы (см. рис. 3.12.1).

Пересечение T и плоскости $x = a$ задается уравнениями

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0, \\ x = a, \end{cases}$$

которые определяют пару прямых с общей точкой $(a, 0,0)$.

Замечание 3.12.2. *Можно доказать, что через каждую точку гиперболоида T проходит точно две прямые целиком лежащие на T.*

Определение 3.12.3. *Поверхность Q, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad (12.2)$$

называется <u>двуполостным гиперболоидом</u>.

При пересечении Q плоскостями $x = h$ $y = h$ получаются гиперболы, а плоскости $z = h$ пересекают Q по эллипсу при $|h| > c$, по точке $(0,0, \pm c)$ при $|h| = c$, по $\emptyset$, если $|h| < c$.

Таким образом, поверхность Q состоит из 2-х неограниченных чаш (см. рис. 3.12.2).

3.13. Параболоиды

Определение 3.13.1. *Поверхность R, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z, \tag{13.1}$$

называется <u>эллиптическим параболоидом</u>.

Из уравнения (13.1) сразу следует, что если $M(x,y,z,)\in R$, то $z\geq 0$. При пересечении R плоскостями $x=h$ $y=h$ получаются параболы, а при пересечении плоскостями $z=h$ $(h>0)$ – эллипсы (см. рис. 3.13.1). Эллиптический параболоид R представляет собой бесконечно расширяющуюся чашу.

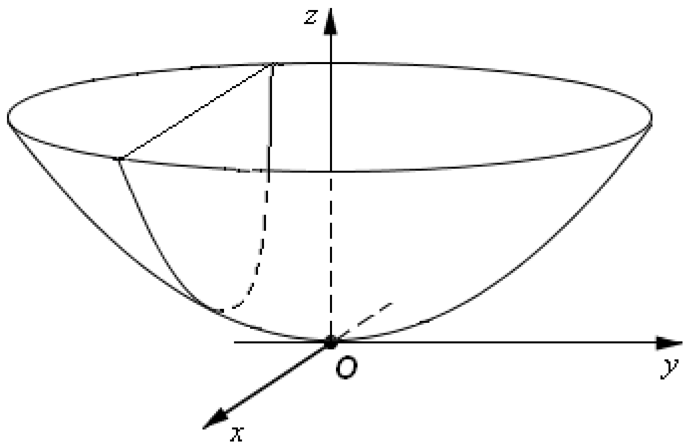


Рис. 3.13.1

Определение 3.13.2. *Поверхность M , которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z, \tag{13.2}$$

называется <u>гиперболическим параболоидом</u>.

При пересечении M плоскостями $x = h$ $y = h$ получаются параболы, при пересечении плоскостями $z = h$ $(h \neq 0)$ – гиперболы (см. рис. 3.13.2). Кому-то гиперболический параболоид M напомнит седло.

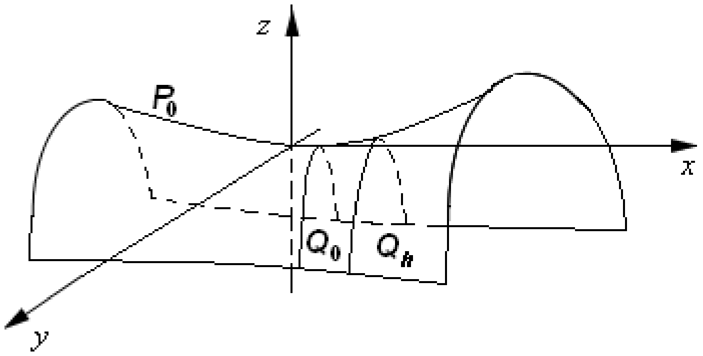


Рис. 3.13.2

Рассмотрим параболы

$$P_0: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = z, \\ y = 0; \end{cases} \qquad Q_0: \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} = z, \\ x = 0; \end{cases} \qquad Q_n: \begin{cases} \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z, \\ x = h. \end{cases}$$

Вершина параболы Q_h, т.е. точка $\left(h, 0, \frac{h^2}{a^2}\right)$, лежит на P_0, при этом Q_h получается из Q_0 параллельным переносом. Таким образом, M есть поверхность, получаемая при движении параболы Q_0, при котором вершина движущейся параболы находиться на P_0, а плоскость параболы и её ось при этом движении остаются параллельными.

Замечание 3.13.3. *Как и для однополосного гиперболоида T можно доказать, что через каждую точку гиперболического параболоида M проходит точно две прямые целиком лежащие на* M. *Следовательно, данные поверхности можно "собрать" из прямых.*

Глава 4. Введение в анализ

4.1. Предел последовательности

Числовой последовательностью называется действительная функция $f(n)$ натурального аргумента $n \in \{1,2,3,\dots\}$. Таким образом, числовая последовательность определяется значениями $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $x_3 = f(3), \dots$, $x_n = f(n), \dots$.

Запись числовой последовательности: $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Примеры

1. $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{1+n^2}, \dots\right\}$.

2. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$.

3. $\{c\} = \{c, c, c, \dots, c. \dots\}$.

Определение 4.1.1. *Число* a *называется пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, *если для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такой номер* $N = N(\epsilon)$, *что для всех* $n > N$ *выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

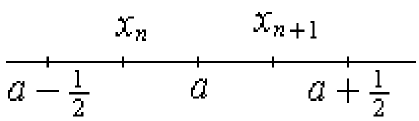
Запись: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$, $\{x_n\}$ сходится к a.

Примеры

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$; $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$. Достаточно взять $N = N(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$.

2. Последовательность $\{(-1)^n\}$ не имеет предела. Действительно пусть $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = a$. Возьмем $\epsilon = \frac{1}{2}$. Тогда для $n > N$:

$$2 = |x_n - x_{n+1}| < 1.$$



Получаем противоречие.

3. $\lim_{n\to\infty} c = c$, так как $|c - c| = 0 < \epsilon$ при любом $\epsilon > 0$ и n.

Теорема 4.1.2. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел, то он единственный.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, и $a \neq b$, $\epsilon = \frac{|b-a|}{4}$. Тогда для $n > N_1$:

$$x_n \in U = (a-\epsilon, a+\epsilon),$$

$$n > N_2: x_n \in V = (b-\epsilon, b+\epsilon).$$

Поэтому, если $n > N = \max(N_1, N_2)$, то $x_n \in U, V$, но $U \cap V = \emptyset$. Противоречие.

Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – две последовательности. Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ $(y_n \neq 0)$ называются соответственно суммой, разностью, произведением, частным последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

Теорема 4.1.3. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, *то имеют место следующие свойства :*

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.
3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

Доказательство. Докажем только 1. Пусть $\epsilon > 0$. По условию, для $n > N_1: |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$; $n > N_2: |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$.

Пусть $n > N = \max(N_1, N_2)$. Тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Пример

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + n + 3}{5n^2 + 2n - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{5 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{3+0+0}{5+0-0} = \frac{3}{5}.$$

Пусть $\{x_n\}$ – некоторая последовательность. Запись:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \tag{1}$$

означает, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$, т.е. для любого $A > 0$ найдется номер $N = N(A)$, что при $n > N$: $|x_n| > A$. Если выполняется (1) и, начиная с некоторого номера, $x_n > 0$, $(x_n < 0)$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right).$$

Примеры

1. $\lim_{n\to\infty}[(-1)^n n^2] = \infty$.

2. $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

3. $\lim_{n\to\infty}(18 - n) = -\infty$.

4.2. Предел функции

Под *окрестностью* точка a понимают любой интервал $(c, d) \ni a$. Интервал $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ называется ϵ-*окрестностью* точки a.

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (за исключением, быть может самой точки a).

Определение 4.2.1. *Число* b *называется пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to a$, *если для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, *что*

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Запись: $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

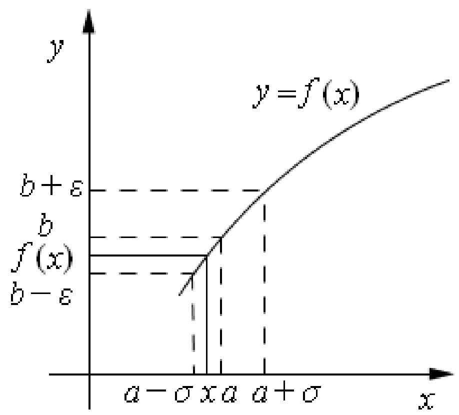


Рис. 4.2.1

Примеры

1. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

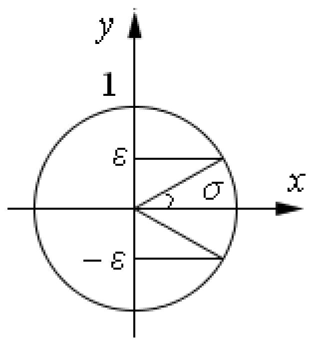


Рис.4.2.2

2. $\lim_{x\to 3}(4x+1) = 13$; $|(4x+1)-13| = 4|x-3|$, $\delta = \frac{\epsilon}{4}$.

Пусть $y = f(x)$ определена при $|x| > M$ (или $x > M$, или $x < -M$), где M – некоторое положительное число.

Определение 4.2.2. *Число* b *называется пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$ (*или* $x \to +\infty$ *, или* $x \to -\infty$)*, если для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такое число* $A = A(\epsilon) > M$*, что*

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

для всех x*, удовлетворяющих неравенству* $|x| > A$ (*или* $x > A$*, или* $x < -A$).

Запись: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (или $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, или

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$).

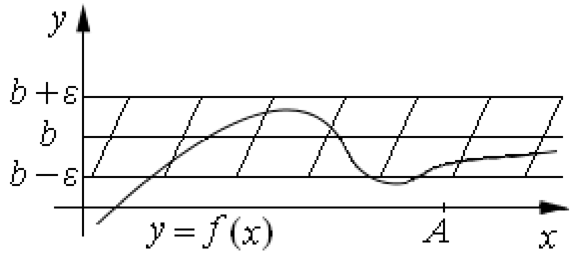


Рис. 4.2.3

Примеры

1. $\lim_{x\to\infty} \cos x$ не существует.

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x} = -1$.

$$\left|\frac{x}{x-1}+1\right| = 1/|1-x| \; < \epsilon \Leftrightarrow |1-x| > 1/\epsilon.$$

Считаем $x > 1$. Тогда $x - 1 > \frac{1}{\epsilon}$, $x > \frac{1}{\epsilon} + 1 = A$.

Пусть a – число или один из символов бесконечности (∞, $+\infty$,$-\infty$).

Теорема 4.2.3. *Пусть* $\lim_{x\to a} f(x) = c$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = d$. *Тогда*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm \varphi(x)] = c \pm d$,
2. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot \varphi(x)] = c \cdot d$
3. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right] = \frac{c}{d}$, $(d \neq 0)$.

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3}{x^3+2x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Определение 4.2.4.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} \infty, \text{если } \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0; \\ +\infty, \text{если } \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0 \text{ и } f(x) > 0 \\ -\infty, \text{если } \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0 \text{ и } f(x) < 0 \end{cases}$$

на некоторой окрестности точки a $(x \neq a)$.

Примеры

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x} = \infty$.

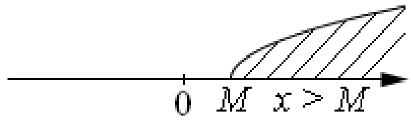
2. $\lim_{x\to 3}\frac{2}{(x-3)^2} = +\infty$.

3. $\lim_{x\to a}\frac{(-3)}{|x-a|} = -\infty$.

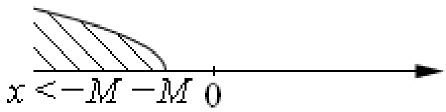
Пусть M – произвольное число > 0.

Окрестность символа

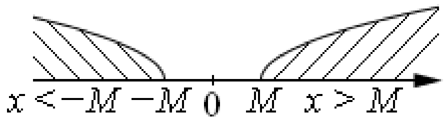
$+\infty\colon \{x | x > M\}$,



$-\infty\colon \{x | x < -M\}$,



$\infty\colon \{x || x| > M\}$,



Пусть $\omega \in \{\infty, +\infty, -\infty\}$. По определению

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \infty, \text{если} \lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{1}{f(x)} = 0; \\ \left.\begin{array}{l} +\infty, \text{если} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \text{ и } f(x) > 0 \\ -\infty, \text{если} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \text{ и } f(x) < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{на некоторой} \\ \text{окресности } \omega. \end{array} \end{array}\right.$$

Примеры

1. $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

2. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

3. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

4. $\lim_{x\to\infty} x^4 = +\infty$.

Теорема 4.2.5 (*об ограниченности функции, имеющей предел*)**.** *Пусть* $\lim_{x\to\omega} f(x) = b$ *, где* b *– число,* ω *– число или один из символов бесконечности. Тогда* $f(x)$ *ограничена на некоторой окрестности* $U(\omega)$*, т.е. существует такое число* $A > 0$*, что*

$$|f(x)| < A \text{ для всех } x \in U(\omega), x \neq \omega.$$

Доказательство. По определению предела для $\epsilon = 1$ найдется такая окрестность $U(\omega)$, что для всех $x \in U(\omega), x \neq \omega$:

$$|f(x) - b| < 1.$$

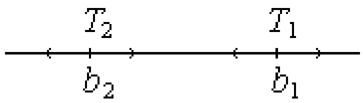
Но $|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b|$. Поэтому $|f(x)| - |b| < 1$, $|f(x)| < |b| + 1$. Теперь достаточно взять $A = |b| + 1$.

Теорема 4.2.6 (*о переходе к пределу в неравенствах*)**.** *Если* $\lim_{x\to\omega} f_1(x) = b_1, \lim_{x\to\omega} f_2(x) = b_2$ *и на некоторой окрестности* $U(\omega)$, $x \neq \omega$*:*

$$f_1(x) \leq f_2(x),$$

то $b_1 \leq b_2$.

Доказательство. Пусть, наоборот, $b_1 \geq b_2$, $\epsilon = \frac{b_2 - b_1}{4}$, T_1 , T_2 $- \epsilon$ - окрестности b_1 и b_2**.**



В силу условия найдутся такие окрестности $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$, что

$$x \in U_1(\omega), x \neq \omega \Longrightarrow f_1(x) \in T_1,\ x \in U_2(\omega),\ x \neq \omega \Longrightarrow f_2(x) \in T_2.$$

Заметим, что $U(\omega) \cap U_1(\omega) \cap U_2(\omega) = V(\omega)$ – окрестность ω . Если $x \in V(\omega)$, $x \neq \omega$, то по условию $f_1(x) \leq f_2(x)$. С другой стороны, $f_1(x) \in T_1$, $f_2(x) \in T_2$, т.е. $f_1(x) \geq f_2(x)$Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 4.2.7 (*о пределе промежуточной функции*)**.** *Если* $\lim_{x\to\omega} f_1(x) = \lim_{x\to\omega} f_2(x) = b$ *и на некоторой окрестности* $U(\omega)$, $x \neq \omega$, $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$, *то* $lim_{x\to\omega} \varphi(x) = b$.

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. В силу условия найдутся такие окрестности $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$, что

$$\begin{aligned} &x \in U_1(\omega), x \neq \omega \Longrightarrow |f_1(x) - b| < \epsilon, \\ &x \in U_2(\omega), x \neq \omega \Longrightarrow |f_2(x) - b| < \epsilon. \end{aligned} \qquad (1)$$

Пусть $U_1(\omega) \cap U_2(\omega) \cap U(\omega) = V(\omega)$. Если $x \neq \omega$, $x \in V(\omega)$, то выполняются неравенства (1) и $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$ (по условию), а значит,

$$b - \epsilon < f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x) < b + \epsilon,$$

т.е. $|\varphi(x) - b| < \epsilon$.

Это доказывает теорему.

4.3. Замечательные пределы

1-й замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

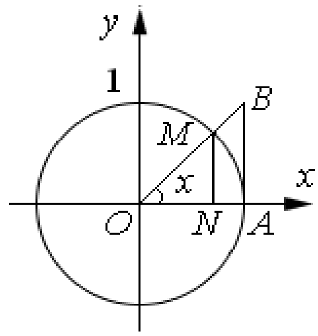
Пусть $0<x<\frac{\pi}{2}$.

$$S_{\Delta OAM}<S_{\text{сект.}OAM}<S_{\Delta OAB},$$

$$\frac{1}{2}|OA|\cdot|MN|<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}|OA|\cdot|BA|,$$

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x\Longrightarrow$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}. \qquad (1)$$



Неравенство (1) справедливо и для $-\frac{\pi}{2}<x<0$, так как $\frac{x}{\sin x},\frac{1}{\cos x}$ – четные функции. Так как $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, остается применить теорему 4.2.7.

Примеры

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\begin{vmatrix}5x=t\\ x=\frac{t}{5}\end{vmatrix}=5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=5.$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot(8x)\cdot\sin 3x}{8\cdot(\sin 8x)\cdot(3x)}=\frac{3}{8}.$

2-й замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e,$$

$e\approx 2.718$, $\log_e a=\ln a$.

Примеры

1. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}=\begin{vmatrix}3x=t\\ x=\frac{t}{3}\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{15}{t}}=e^{15}$.

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x-1}\right)^{x+10}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-1}\right)^{x+10}=\begin{vmatrix}\frac{7}{x-1}=t\\ x=\frac{7}{t}+1\end{vmatrix}=$

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{7}{t}+11}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{7}{t}}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{11}=e^{7}$

4.4. Непрерывность функции

Определение 4.4.1. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $x = x_0 + \Delta x$, Δx – приращение аргумента.

Число $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращение функции $f(x)$ в точке x_0.

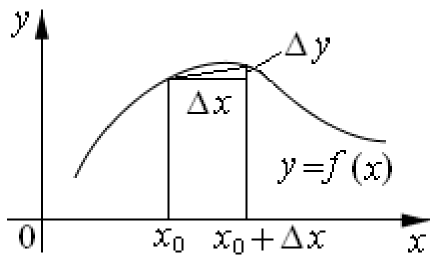


Рис.4.4.1

Определение 4.4.2. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Примеры.

1. $y = c$ – const, $\Delta y = c - c = 0, \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

2. $y = x$, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.

3. $y = \sin x$.

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left|2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$$
$$\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Теорема 4.4.3. *Если $f(x)$, $\varphi(x)$ – непрерывны в точке x_0, то $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0) \neq 0)$ также непрерывны в точке x_0. Это следует из соответствующей теоремы о пределах.*

Определение 4.4.4. *Если* $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$ *– две функции, то функцию* $z = \varphi(f(x))$ *называют сложной функцией или суперпозицией* f *и* φ.

Примеры.

1. $\operatorname{tg}(x^2)$.

2. $\ln^3 x$.

3. $e^{\cos x}$.

Теорема 4.4.5 (*о непрерывности сложной функции*). *Пусть* $y = f(x)$ *– непрерывна в точке* x_0, $f(x_0) = y_0$, $z = \varphi(y)$ *– непрерывна в точке* y_0. *Тогда сложная функция* $z = \varphi(f(x))$ *непрерывна в* x_0.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = \varphi(f(x_0)).$$

4.5. Понятие элементарной функции

Функции c – const, x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ называют *простейшими элементарными функциями*.

Элементарной называется функция, которая получается из простейших элементарных функций с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции.

Примеры

1. $2x^2 + \cos(e^{x+1} + 5)$.

2. $\ln(1 + \operatorname{arctg} x^4)$.

3. $\frac{2x-3}{\cos^2 x} 2^x - 6$.

Теорема 4.5.1. *Элементарные функции непрерывны в области их определения.*

Доказательство. Для доказательства достаточно установить непрерывность простейших элементарных функций и применить теоремы 4.4.3, 4.4.5; $y = c$, $y = x$, $y = \sin x$ – непрерывны (см. примеры 1, 2, 3 п. 4.4) следовательно, $\frac{\pi}{2} - x$ – непрерывна, значит, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ – непрерывная функция. Тогда $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ – непрерывная функция, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ – непрерывная функция. Непрерывность остальных функций доказывать не будем.

4.6. Бесконечно малые функции

Пусть ω – число или один из символов бесконечности.

Определение 4.6.1. *Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой (бесконечно большой) при $x \to \omega$, если*

$$\lim_{x \to \omega} f(x) = 0\ (\infty).$$

Примеры.

1. $\frac{1}{x}$ – бесконечно малая при $x \to \infty$.
2. $\sin x$ – бесконечно малая при $x \to 0$.
3. e^x – бесконечно малая при $x \to -\infty$ (но не является бесконечной малой при $x \to +\infty$ (∞)).

Теорема 4.6.2. *Пусть $\lim_{x \to \omega} \varphi(x) = c$, где c – число. Тогда $\varphi(x) = c + f(x)$, где $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to \omega$.*

Доказательство. Положим, что $f(x) = \varphi(x) - c$. Имеем

$$\lim_{x \to \omega} f(x) = \lim_{x \to \omega} (\varphi(x) - c) = \lim_{x \to \omega} \varphi(x) - \lim_{x \to \omega} c = c - c = 0.$$

Это доказывает теорему.

Определение 4.6.3. *Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to \omega$. Если*

$$\lim_{x \to \omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то $\alpha(x)$,$\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми.

Запись: $\alpha(x) \approx \beta(x)$, $x \to \omega$.

Примеры.

1. $\sin x \approx x$, $x \to 0$ (первый замечательный предел).

2. $\ln(1+x) \approx x,\ x \to 0;\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} =$
$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

3. $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2},\ x \to 0$ (доказать самостоятельно, используя $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$).

Теорема 4.6.4. *Если* $\alpha(x) \approx \beta(x), \gamma(x) \approx \sigma(x), x \to \omega$, *то*

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to\omega} \frac{\beta(x)}{\sigma(x)}. \tag{1}$$

Равенство (1) надо понимать в том смысле, что если один из пределов существует, то существует другой и они равны.

Доказательство. Пусть, например, существует левый предел в равенстве (1).

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\beta}{\sigma} = \lim_{x\to\omega} \frac{\beta\alpha\gamma}{\sigma\alpha\gamma} = \lim_{x\to\omega} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \lim_{x\to\omega} \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \lim_{x\to\omega} \frac{\gamma}{\sigma} = \lim_{x\to\omega} \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Примеры.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$

4.7. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность

Если в определении предела $f(x)$ при $x \to a$ рассматривать только точки $x > a$ ($x < a$), то получим понятие *правого* (*левого*) пределов. Обозначение:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x)\right).$$

Примеры.

1. $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,\ \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$

2. $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1 \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1.$

Определение 4.7.1. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной справа* (*слева*) *в точке a, если*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \right).$$

Пример.

$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ 3, & x < 0. \end{cases}$ – непрерывна справа в точке $x = 0$, но не является непрерывной слева в этой точке.

4.8. Классификация точек разрыва

а) *Устранимый разрыв.* Точка a называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если существует конечный предел $A = \lim_{x \to a} f(x)$, но либо $A \neq f(a)$, либо $f(x)$ в точке a не определена.

Пример.

$$a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

б) *Разрыв 1-го рода.* Точка a называется точкой разрыва 1-го рода функции $f(x)$, если существуют конечные, но не равные друг другу односторонние пределы

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{x \to a-0} f(x).$$

Примеры.

1. $\operatorname{sgn} x$, $a = 0$.

2. $a = 2$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ x, & x < 2. \end{cases}$

в) *Разрывы 2-го рода.* Точка a называется точкой разрыва 2-го рода функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$ бесконечен или не существует.

Примеры.

1. $\sin \frac{1}{x}$ в точке $a = 0$.

2. $\frac{1}{x-7}$ при $a = 7$.

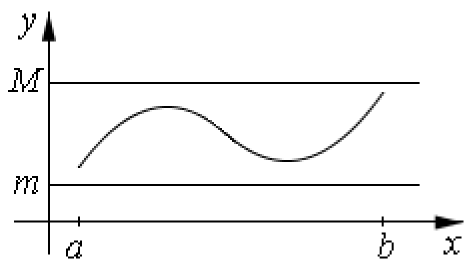
3. $\operatorname{ctg} x$ при $a = \pi k,\ k = 0, \pm 1, \ldots$.

4.9. Свойства функции, непрерывной на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

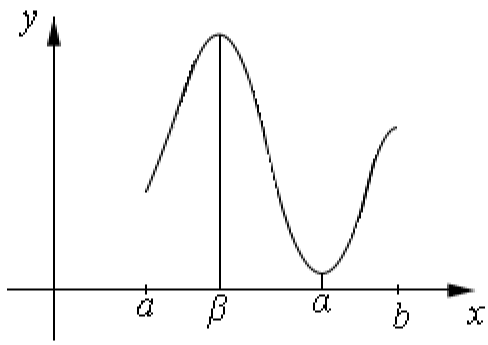
Теорема 4.9.1. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда имеем:*

1. *$f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т.е. существуют такие числа m, M, что $\forall x \in [a, b]$: $m \leq f(x) \leq M$.*

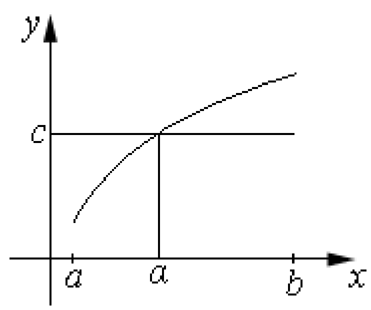


2. *$f(x)$ достигает на $[a, b]$ своего наименьшего и наибольшего значений, т.е. $\exists\ \alpha, \beta \in [a, b]$*

$$f(\alpha) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$



3. *Если c лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то $\exists \alpha \in [a, b]$: $f(\alpha) = c$.*



Без доказательства.

Следствие 4.9.2. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, *то уравнение* $f(x) = 0$ *имеет на* $[a, b]$ *хотя бы один корень.*

Глава 5. Производная и её приложение

5.1. Производная

Пусть $y = f(x)$ определена на (a, b). Зафиксируем $x \in (a, b)$. Пусть $\Delta x \neq 0$ такое число, что $x + \Delta x \in (a, b)$. Число

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующим приращению аргумента Δx.

Рассмотрим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Определение 5.1.1. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x *называется предел отношения* (1) *при* $\Delta x \to 0$ (*при условии, что этот предел существует*).

Обозначения производной: $y'(x)$, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Итак, по определению,

$$y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Примеры.

1. $y = c$ – const; $\Delta y = c - c = 0 \Longrightarrow c' = 0$.

2. $y = x$; $\Delta y = \Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Longrightarrow x' = 1$.

3. $y = \sqrt[3]{x}$. Найдем производную в точке $x = 0$.

$$y(0) = 0, \quad \Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

4. $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. Действительно,

$$y(0) = 0, \Delta y = |0 + \Delta x| - 0 = |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x \geq 0, \\ -\Delta x, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \Delta x > 0, \\ -1 & \Delta x < 0 \end{cases} \text{не имеет предела при } \Delta x \to 0.$$

Определение 5.1.2. *Функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* x (*на множестве* X)*; если она имеет в* x (*во всех точках множества* X) *конечную производную.*

Теорема 5.1.3. *Если* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x, *то она и непрерывна в точке* x.

Доказательство. По условию существует конечный предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. $f(x)$ непрерывна в точке x. Теорема доказана.

Замечание 5.14. *Обратное утверждение неверно. Так, функция* $y = |x|$ *непрерывна в любой точке, но не имеет производную в точке* 0. *Графики дифференцируемых функций не только непрерывные линии, но еще и "гладкие". Как мы увидим, они имеют касательные в любой своей точке* (рис. 5.1.1)

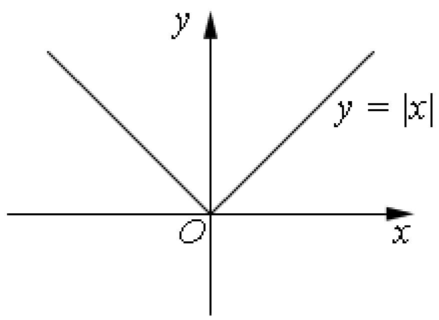


Рис. 5.1.1

Из многочисленных примеров приложений производных отметим лишь два.

1. Предположим, что $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии. Здесь y есть расстояние (с учетом знака) точки до начальной точки O в момент времена x. Тогда отношение (1) определяет среднюю скорость точки за время от x до $x + \Delta x$, а $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x.

2. Пусть $y = f(x)$ есть количество тока, проходящее через сечение проводника за время x. Тогда отношение (1) есть средняя сила за промежуток времени $[x, x + \Delta x]$, а $f'(x)$ – сила тока в момент, времени x.

5.2. Геометрический смысл производной

Прямую MP назовем секущей.

Определение 5.2.1. *Касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $M(x, f(x))$ *назовем предельное положение секущей* MP *при* $\Delta x \to 0$ (*если оно существует*) – см. рис. 5.2.1.

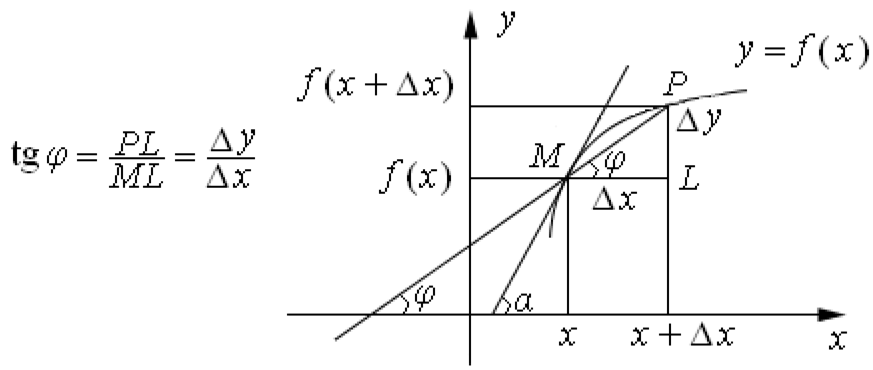


Рис. 5.2.1

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. существует конечный предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \operatorname{tg} \alpha.$$

где $\alpha = \operatorname{arctg} f'(x)$. Заметим, что знаки $\lim$ и tg можно поменять местами в силу непрерывности функции $y = \operatorname{tg} x$. Так как $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$, то в точке M существует касательная к графику функции $y = f(x)$.

Итак, производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной $\operatorname{tg}\alpha$ в точке M к графику $y = f(x)$.

5.3. Правила дифференцирования

Теорема 5.3.1. *Если* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то* $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ $(v(x) \neq 0)$ *также дифференцируемы в* x, *причем имеют место формулы:*

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Доказательство. Докажем только первую формулу. Пусть $y = u \pm v$, Δu, Δv, Δy – приращения функций $u, v, \boldsymbol{y}$ в точке x, соответствующие приращению $\Delta x \neq 0$. Тогда, очевидно,

$$\boldsymbol{\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \big(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) \pm v(x)\big)}$$
$$\boldsymbol{= \big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) \pm \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big) = \Delta u \pm \Delta v}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}}.$$

Осталось перейти к пределу при $\Delta x \to 0$.

Следствие 5.3.2. *Если* $v(x) = c - const$, *то*

$$(cu)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu'.$$

Теорема 5.3.3. *Пусть* $u = \varphi(x)$ *дифференцируема в точке* x, *а* $y = f(u)$ *дифференцируема в точке* u. *Тогда сложная функция* $y = f\big(\varphi(x)\big)$ *дифференцируема в точке* x, *причем справедлива следующая формула:*

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

5.4. Производные тригонометрических функций

1. $(\sin x)' = \cos x$.

Действительно, применяя формулу $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, получаем.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

мы использовали 1-й замечательный предел и непрерывность функции $y = cos\, x$.

2. $(\cos x)' = -\sin x$.

В самом деле,

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x\,.$$

3. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Воспользуемся формулой, выражающей производную частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Доказывается аналогично предыдущему.

5.5. Таблица производных простейших элементарных функций

1. $c' = 0$ (c – const);
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$, в частности, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^x)' = a^x\, ln\, a$ $(0 < a \neq 1)$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(log_a x)' = \frac{1}{x} log_a e$ $(x > 0, 0 < a \neq 1)$;
6. $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$;
7. $(sin\, x)' = cos\, x$;
8. $(cos\, x)' = -\, sin\, x$;

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Указанная таблица вместе с правилами дифференцирования суммы, произведения и частного и правилом дифференцирования сложной функции составляет основу дифференциального исчисления.

Примеры.

1. $(x^3 + 2\sin x)' = 3x^2 + 2\cos x$.

2. $\left((1-x)e^x\right)' = (-1)e^x + (1-x)e^x$.

3. $\left(\frac{x+\sin x}{2-\cos x}\right)' = \frac{(1+\cos x)(2-\cos x)-\sin x(x+\sin x)}{(2-\cos x)^2}$.

4. $(\ln(x^2+3))' = \frac{1}{x^2+3}(x^2+3)' = \frac{2x}{x^2+3}$.

5. $(e^{\cos 2x})' = e^{\cos 2x}(\cos 2x)' = e^{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2$.

6. $y = x^{\sin x}$, $\ln y = \sin x \ln x$; $\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$,

$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

5.6. Дифференциал

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \quad (1)$$

Определение 5.6.1. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующим приращению аргумента Δx, называется произведение*

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Если x – независимое переменное, то по определению

$$dx = \Delta x, dy = f'(x)dx, f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

5.7. Геометрический смысл дифференциала

Пусть l – касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\big(x, f(x)\big)$ (см. рис 3). Покажем, что dy – величина отрезка PQ. Действительно,

$$dy = f'(x)\Delta x = tg\ \ \alpha\Delta x = \frac{PQ}{\Delta x}\Delta x = PQ.$$

Итак, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующий приращению аргумента Δx, равен приращению ординаты касательной l в точке M.

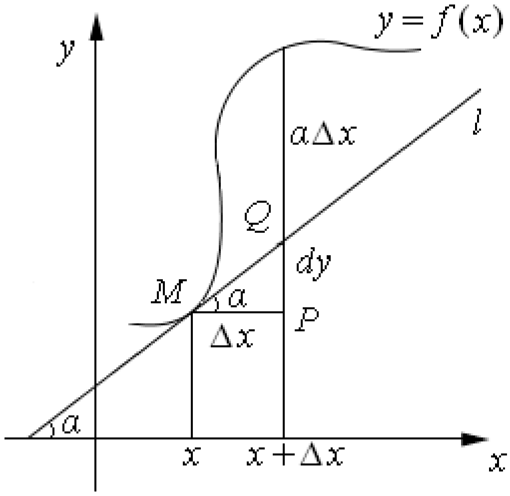


Рис. 5.7.1

5.8. Инвариантность (неизменность) формы дифференциала

Если x – независимая переменная, то

$$dy = f'(x)dx.$$

Допустим, что $x = \varphi(t)$, где t – независимая переменная, $y = f\big(\varphi(t)\big)$. Тогда

$$dy = \Big(f\big(\varphi(t)\big)'\Big)dt = f'(x)\,\varphi'(t)dt = f'(x)dx.$$

Итак, форма дифференциала не изменялась. Это свойство и называется *инвариантностью формы дифференциала.*

5.9. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Из формулы (1) выводим, что при малых Δx.

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x.$$

Отсюда получаем

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Это и используется в приближенных вычислениях.

Пример.

Вычислить приближенно: а) $\sqrt{1.0002}$; б) $e^{0.0005}$.

5.10.Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда $y' = f'(x)$ определена на (a, b). Если эта функция также дифференцируема на (a, b), то можно рассмотреть функцию

$$y''(x) = f''(x) = \big(f'(x)\big)',$$

которая называется второй производной (производной второго порядка) функции $y = f(x)$. Аналогично,

$f'''(x) = \big(f''(x)\big)'$ – третья производная;

$f^{(4)}(x) = \big(f'''(x)\big)'$ – четвертая производная;

……………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' - \ n\text{-я производная функции } y = f(x).$$

Примеры.

1. $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, …, $y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

2. $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$, …,

$$y^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n = 1 + 4k, \\ -\sin x, & n = 2 + 4k, \\ -\cos x, & n = 3 + 4k, \\ \sin x, & n = 4k. \end{cases}$$

3. $y = \frac{1}{2x+1}$, $y' = (-1)(2x+1)^{-2} \cdot 2$, $y'' = (-1)(-1) \cdot 2 \cdot (2x+1)^{-3} \cdot 2^2$, …,

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\,(2x+1)^{-(n+1)} \cdot 2^n.$$

5.11. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть зависимость $\boldsymbol{y}$ от $\boldsymbol{x}$ от выражена через параметр $\boldsymbol{t}$, (рис. 5.11.1) т.е.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad a \le t \le b.$$

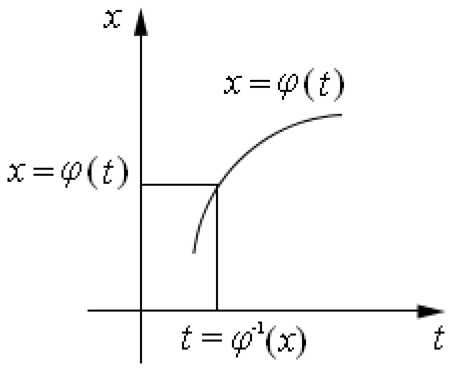


Рис. 5.11.1

Это надо понимать так. Для функции $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$ существует обратная функция $\boldsymbol{t = \varphi^{-1}(x)}$ и поэтому можно записать явную зависимость

$$\boldsymbol{y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)}.$$

Найдем $\boldsymbol{y'_x}$ через $\boldsymbol{\varphi'_t}, \boldsymbol{\psi'_t}$. В силу инвариантности формы дифференциала $\boldsymbol{dy = y'_x dx}$. Отсюда

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_t dt}{\varphi'_t dt} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}}.$$

Аналогично находим 2-ю производную:

$$(dy'_x)' = y''_{xx}dx,$$

$$y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d\left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)' dt}{\varphi'_t dt} = \frac{\psi''_{tt}\varphi'_t - \varphi''_{tt}\psi'_t}{(\varphi'_t)^3}.$$

Подобном образом – можно вычислить и производные более высоких порядков.

5.12. Некоторые свойства дифференцируемых функций

Определение 5.12.1. *Говорят, что функция* $y = f(x)$ *имеет* (*или достигает*) *в точке* α *локальный максимум* (*минимум*), *если найдется такая окрестность* $U(\alpha)$ *точки* α, *что для всех* $x \in U(\alpha)$:

$$f(\alpha) \geq f(x) \quad \big(f(\alpha) \leq f(x)\big).$$

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием *локальный экстремум*.

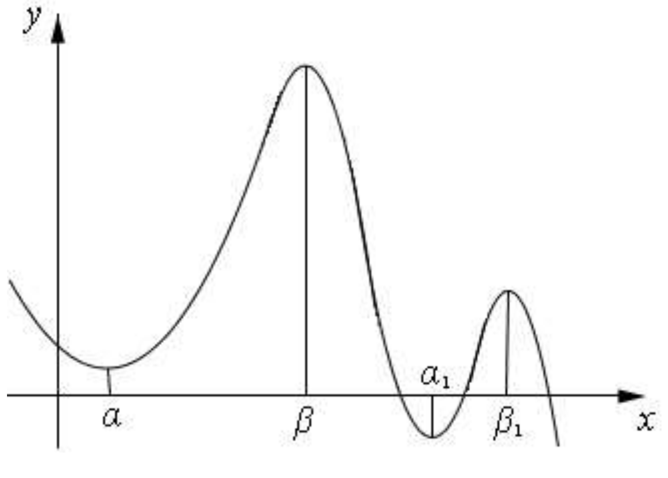


Рис. 5.12.1

Функция, график которой изображен на рис. 5.12.1, имеет локальный максимум в точках β, β_1 и локальный минимум в точках α, α_1

Теорема 5.12.2 (Теорема Ферма)**.** *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* α *и имеет в этой точке локальный экстремум. Тогда* $f'(a) = 0$.

Доказательство. Идея доказательства теоремы Ферма следующая. Пусть для определенности $f(x)$ имеет в точке α локальный минимум. По определению, $f'(\alpha)$ есть предел при $\Delta x \to 0$ отношения

$$\frac{f(\alpha+\Delta x) - f(\alpha)}{\Delta x} = g(\Delta x).$$

Но при достаточно малых (по абсолютной величине) Δx

$$f(\alpha+\Delta x) - f(\alpha) \geq 0.$$

Следовательно, при таких Δx получаем

$$g(\Delta x) \geq 0, \text{если } \Delta x > 0,$$

$$g(\Delta x) \leq 0, \text{если } \Delta x < 0.$$

Отсюда и следует, что $f'(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta x) = 0$. Студенту предлагается провести полное доказательство самостоятельно.

Теорема 5.12.3 (Теорема Ролля)**.** *Если* $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *дифференцируема на* (a, b) *и* $f(a) = f(b)$, *то существует такая точка* $\alpha \in (a, b)$, *что* $f'(\alpha) = 0$.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке, найдутся такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1) = M \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2) = m.$$

1. $M = m$. В этом случае $f(x) = M = m$ – const и $f'(\alpha) = 0$ при любом $\alpha \in (a, b)$.

2. $M > m$. Поскольку $f(a) = f(b)$, то хотя бы одна из точек x_1 и x_2 принадлежит (a, b). Обозначим эту точку через α. Очевидно, $f(x)$ достигает в точке α локального экстремума. В силу условия $f(x)$ дифференцируема в точке α. По теореме Ферма $f'(\alpha) = 0$. Теорема доказана.

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то, согласно теореме Ролля, на кривой $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox (рис. 5.12.2).

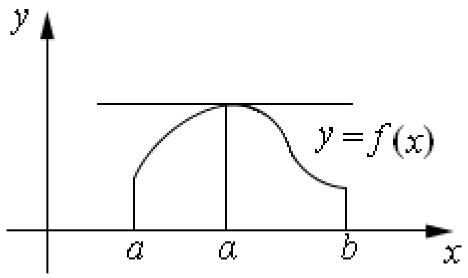


Рис. 5.12.2

Теорема 5.12.4 (Теорема Коши). *Пусть* $\boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{g(x)}$ *непрерывны на* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, *дифференцируемы на* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *и* $\boldsymbol{g'(x) \neq 0}$ *при любом* $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. *Тогда найдется такая точка* $\boldsymbol{\alpha} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, *что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Доказательство. Заметим, что $\boldsymbol{g(a) \neq g(b)}$. Действительно, в противном случае для функции $\boldsymbol{g(x)}$ были бы выполнены все условия теоремы Ролля. Следовательно, нашлась бы такая точка $\boldsymbol{\beta} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, что $\boldsymbol{g'(\beta) = 0}$. Но это противоречит условию теоремы.

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big).$$

В силу условия $\boldsymbol{F(x)}$ непрерывна на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, дифференцируема на $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Кроме того, очевидно, что $\boldsymbol{f(a) = f(b) = 0}$. Поэтому по теореме Ролля найдется такая точка $\boldsymbol{\alpha} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, что $\boldsymbol{F'(\alpha) = 0}$, т.е.

$$\boldsymbol{f'(\alpha) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\alpha) = 0}.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.12.5 (Теорема Лагранжа). *Если* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *непрерывна на* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, *дифференцируема на* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, *то найдется такое* $\boldsymbol{\alpha} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, *что*

$$\boldsymbol{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)}.$$

Доказательство. Теорема Лагранжа прямо следует из теоремы Коши при $g(x) = x$.

Геометрически теорема Лагранжа означает, что на кривой $\boldsymbol{y = f(x)}$ между точками $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ найдется такая точка $\boldsymbol{C}$, касательная в которой параллельна хорде $\boldsymbol{AB}$ (рис.5.12.3).

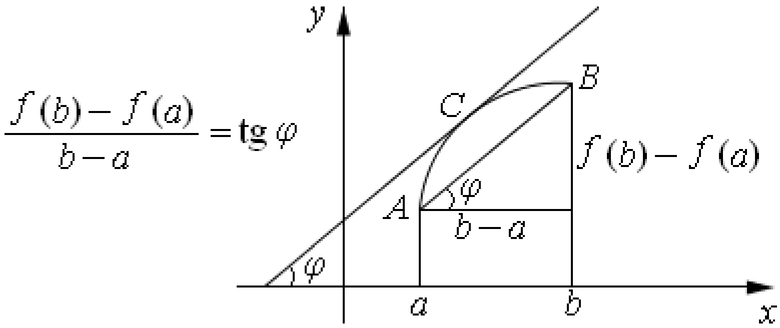


Рис. 5.12.3

5.13. Раскрытие неопределенности. Правило Лопиталя

Будем говорить, что $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to \omega$ (ω – число или один из символов бесконечности), если

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = \lim_{x\to\omega} g(x) = 0\ (\infty).$$

Раскрыть эту неопределенность – это значит найти $\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)}$ или доказать, что этот предел не существует.

Так, $\frac{\sin x}{x}$ – неопределенность вида $\frac{0}{0}$, она раскрыта при выводе 1-го замечательного предела.

Теорема 5.13.1 (правило Лопиталя)**.** *Пусть* $f(x), g(x)$ *дифференцируемы на некоторой окрестности* ω*, за исключением, быть может,* ω *и* $g'(x) \neq 0$ *в этой окрестности. Пусть, далее,*

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = \lim_{x\to\omega} g(x) = 0\ (\infty).$$

Тогда, если существует

$$\lim_{x\to\omega} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует и $\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)}$*, причем*

$$\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\omega} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 5.13.2. *Иногда правило Лопиталя применяют несколько раз.*

Примеры.

1. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$

2. $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+4x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{6x+4}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x} = 0.$

Неопределенность вида $0\cdot\infty$ ($f(x)\cdot g(x)$, $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to\omega$). Эта неопределенность сводится к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ представлением произведения в виде дробей

$$\boldsymbol{f\cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0.$$

Неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0 сводятся к неопределенности $0\cdot\infty$ с помощью логарифмирования.

Пример.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0+0} x^x}.$$

Обозначим $y = x^x$. Тогда $\ln y = x\ln x$. Ввиду предыдущего примера $\lim_{x\to 0+0}\ln y = \lim_{x\to 0+0} x\ln x = 0$. Поэтому в силу непрерывности логарнфмической функции

$$\boldsymbol{\ln\lim_{x\to 0+0} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+0} y = 1}.$$

Неопределенность вида $\infty - \infty$ ($f(x) - g(x)$, $f, g \to +\infty$ $(-\infty)$ при $x\to\omega$) сводится к неопределенности $\frac{0}{0}$ алгебраическими преобразованиями

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}.$$

5.14. Исследования функций с помощью производных. Условия возрастания и убывания функции

Определение 5.14.1. *Говорят, что функция* $f(x)$ *не убывает* (*не возрастает*) *на* (a,b) , *если для любых точек* $x_1 < x_2$ *из* (a,b) *справедливо неравенство*

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \big(f(x_1) \geq f(x_2)\big).$$

Определение 5.14.2. *Говорят, что функция* $f(x)$ *возрастает* (*убывает*) *на* (a,b), *если для любых точек* $x_1 < x_2$ *из* (a,b) *справедливо неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \big(f(x_1) > f(x_2)\big).$$

Теорема 5.14.3. *Дифференцируемая на* (a,b) *функция* $f(x)$ *тогда и только тогда не убывает* (*не возрастает*) *на* (a,b), *когда* $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) *при любом* $x \in (a,b)$.

Доказательство.

1. Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) всюду на (a,b). Рассмотрим любые $x_1 < x_2$ из (a,b) . В силу условия $f(x)$ дифференцируема (и непрерывна) на $[x_1, x_2]$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\alpha), \quad x_1 < \alpha < x_2.$$

Так как $(x_2 - x_1) > 0, f'(\alpha) \geq 0$ (≤ 0), $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ (≤ 0), а значит, $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a,b).

2. Необходимость. Пусть, например, $f(x)$ не убывает на (a,b),$x \in (a,b)$, $x + \Delta x \in (a,b)$. Тогда

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x) \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 5.14.4. *Для возрастания* (*убывания*) $f(x)$ *на* (a,b) *достаточно, чтобы* $f'(x) > 0$ (< 0) *при любом* $x \in (a,b)$.

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство достаточности в теореме 5.14.3.

Замечание 5.14.5. *Обратное утверждение к теореме* 5.14.4 *не имеет места, т.е. если* $f(x)$ *возрастает* (*убывает*) *на* (a,b), *то не всегда* $f'(x) > 0$ (< 0) *при любом* $x \in (a,b)$.

Действительно, $y = x^3$ возрастает на $(-\infty, +\infty)$, но $y'(0) = 0$.

5.15. Локальный экстремум функции

По теореме Ферма, если $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Определение 5.15.1. *Точку x_0 назовем стационарной для функции, $f(x)$, если$f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$.*

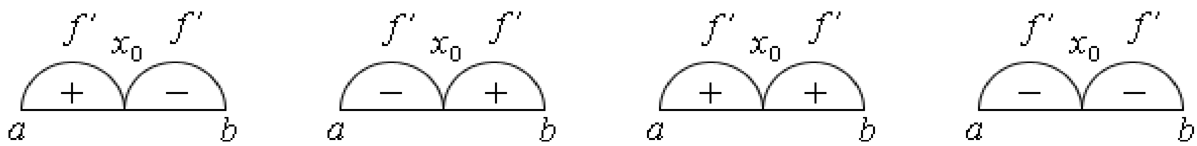
Необходимое условие экстремума. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то либо x_0 – стационарная точка, либо $f(x)$ не является дифференцируемой в точке x_0.

Замечание 5.15.2. *Необходимое условие экстремума не является достаточным.*

Например, $y = x^3$, $y = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$.

Теорема 5.15.3 (первое достаточное условие экстремума)**.** *Пусть x_0 – стационарная точка функции $y = f(x)$, которая дифференцируема на некотором интервале $(a, b) \ni x_0$. Тогда* :

1. *$f'(x) > 0$ на (a, x_0) , $f'(x) < 0$ на $(x_0, b) \Longrightarrow f$ имеет в точке x_0 локальный максимум.*
2. *$f'(x) < 0$ на (a, x_0) , $f'(x) > 0$ на $(x_0, b) \Longrightarrow f$ имеет в точке x_0 локальный минимум.*
3. *$f'(x)$ имеет одинаковые знаки на (a, x_0) , $(x_0, b) \Longrightarrow f$ не имеет локального экстремума в точке x_0.*



Лок. максимум *Лок. минимум* *Экстремума нет* *Экстремума нет*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Надо показать, что $f(x_0) > f(x)$. По теореме Лагранжа (применительно к отрезку $[x, x_0]$ или $[x_0, x]$)

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\alpha), \tag{1}$$

где α лежит между x_0 и x:

а) $\boldsymbol{x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0,\ f'(\alpha) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)}$;

б) $\boldsymbol{x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0,\ f'(\alpha) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)}$.

в) Утверждение 2 доказывается аналогично.

Докажем 3. Так как $f'(\alpha)$ имеет один и тот же знак при любом $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ то $f(x) - f(x_0)$ имеет разные знаки при $x > x_0$ и при $x < x_0$ в силу формулы (1). Это доказывает отсутствие экстремума в точке x_0. Теорема доказана.

Примеры.

Найти точки локального экстремума функций:

а) $y = \frac{1}{1+x^2}$,

б) $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

Теорема 5.15.4 (второе достаточное условие экстремума)**.** *Пусть x_0 – стационарная точка функции $y = f(x)$, которая имеет в точке x_0 вторую производную. Тогда:*

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ *имеет в точке x_0 локальный минимум.*
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ *имеет в точкеx_0 локальный максимум.*

Эту теорему доказывать не будем.

Пример.

$y = x^3 - 3x^2 - 4$.

5.16. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). По свойству функций непрерывных на отрезке найдется такая точка $x_0 \in [a, b]$, что

$$f(x_0) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Тогда либо $x_0 = a$, либо $x_0 = b$, либо $x_0 \in (a, b)$. В последнем случае $f(x)$ достигает в точке x_0 локальный максимум. В силу теоремы Ферма x_0 – стационарная точка. Предположим, что стационарных точек для функции f на (a, b) имеется лишь конечное число $x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

Аналогично,

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значений функции $y = \sin x + \cos x$ на $[0, \pi]$.

Имеем

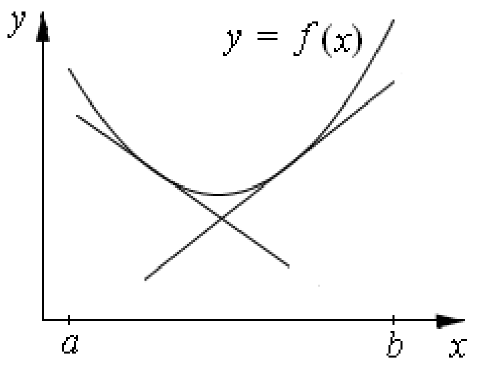
$$y' = \cos x - \sin x, \quad y' = 0 \iff x = \frac{\pi}{4};$$

$y(0) = 0,\ y(\pi) = -1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Таким образом $y_{max} = \sqrt{2}$, $y_{min} = -1$.

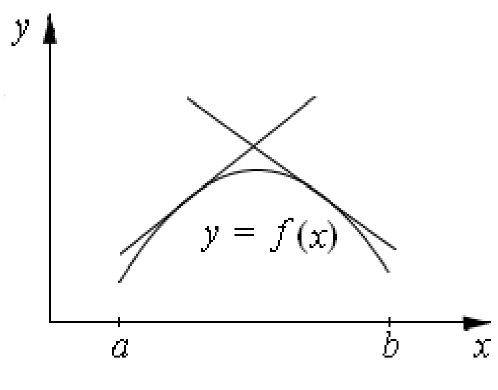
5.17. Выпуклость кривой, точки перегиба

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда в любой точке $\big(x, f(x)\big)$ графика функции $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ существует касательная.

Определение 5.17.1. *Говорят, что кривая $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость направленную вниз (вверх), если она лежит в пределах (a, b) выше (ниже) любой своей касательной.*



Выпуклость направлена вниз



Выпуклость направлена вверх

Теорема 5.17.2. *Пусть* $y = f(x)$ *имеет на* (a, b) *конечную 2-ю производную. Тогда:*

1. $f'' > 0, \forall x \in (a, b) \Longrightarrow$ *график* $f(x)$ *имеет на* (a, b) *выпуклость, направленную вниз;*

2. $f'' < 0, \forall x \in (a, b) \Longrightarrow$ *график* $f(x)$ *имеет на* (a, b) *выпуклость,*

направленную вверх.

Без доказательства.

Пример.

Исследовать направление выпуклости графика $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

Так как

$$y'' = 6(x-1), \quad y'' > 0 \Leftrightarrow x > 1, \quad y'' < 0 \Leftrightarrow x < 1,$$

выпуклость графика направлена вниз на $(1, +\infty)$ и вверх на $(-\infty, 1)$.

Определение 5.17.3. *Точка* $\big(c, f(c)\big)$ *графика функции* $f(x)$ *называется точкой перегиба, если на* (a, c) *и* (c, b) *кривая* $y = f(x)$ *имеет разные выпуклости,* (рис. 5.17.2).

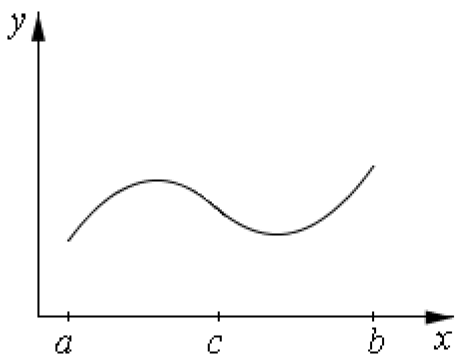


Рис.5.17.1

Теорема 5.17.4 (необходимое условие перегиба)**.** *Если кривая* $y = f(x)$ *имеет перегиб в точке* $\big(c, f(c)\big)$ *и функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* c *непрерывную вторую производную, то* $f''(c) = 0$.

Замечание 5.17.5. *Необходимое условие перегиба не является достаточным.*

Например, если рассмотреть функцию $y = x^4, c = 0$.

Теорема 5.17.6 (первое достаточное условие перегиба). *Пусть* $y = f(x)$ *имеет вторую производную на* $(a, b) \ni c$, $f''(c) = 0$. *Если* $f''(x)$ *имеет на* (a, c), (c, b) *разные знаки, то* $\big(c, f(c)\big)$ *– точка перегиба графика* $f(x)$.

Теорема 5.17.7 (второе достаточное условие перегиба). *Если* $y = f(x)$ *имеет в точке с конечную третью производную,* $f''(c) = 0, f'''(c) \neq 0 \Longrightarrow \big(c, f(c)\big)$ *– точка перегиба графика* $f(x)$.

Эти теоремы доказывать не будем.

Пример.

Найти точки перегиба функций:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 4$,

б) $y = \frac{\ln x}{x}$.

5.18. Асимптоты графика функции

Определение 5.18.1. *Прямая* $x = a$ *называется вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$*, если хотя бы одно из предельных значений* $\lim_{x\to a+0} f(x)$ *или* $\lim_{x\to a-0} f(x)$ *равно* $+\infty$ *или* $-\infty$.

Примеры.

1. $y = \frac{1}{x-a}, \lim_{x\to a+0} \frac{1}{x-a} = +\infty, \lim_{x\to a-0} \frac{1}{x-a} = -\infty,\ x = a$ – вертикальная асимптота (рис. 5.18.1).

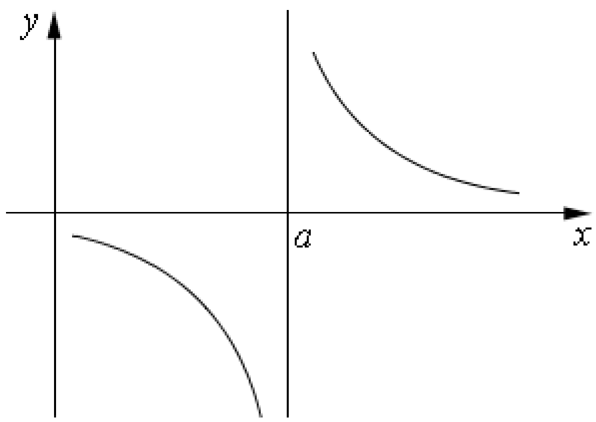


Рис. 5.18.1

2. $y = \ln x$, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота, так как $\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$ (рис. 5.18.2).

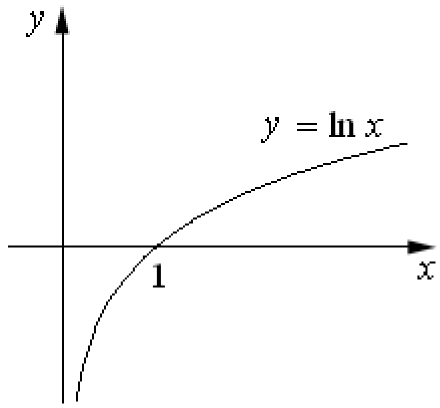


Рис.5.18.2

Определение 5.18.2. *Прямая* $y = kx + b$ *называется наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ $(-\infty)$*, если*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{1}$$

где $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \alpha(x) = 0.$

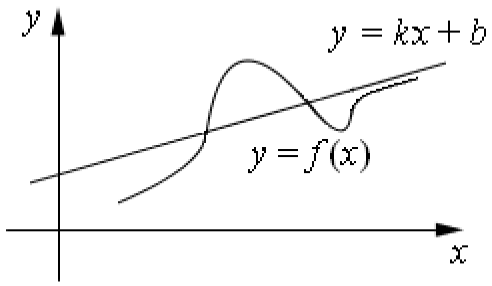


Рис.5.18.3

Теорема 5.18.3. *Прямая* $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ $(-\infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx).$$

Доказательство. Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$, т.е. имеет место равенство (1).

Тогда

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получаем

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Далее из равенства (1) $b = f(x) - kx - \alpha(x)$. Переходя к пределу $x \to +\infty$, получаем

$$b = \mathop{lim}_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Докажем обратное утверждение. Пусть пределы, указанные в теореме, существуют и конечны. Следовательно,

$$f(x) - kx = b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$. Отсюда и получаем представление (1). Теорема доказана.

Примеры.

Найти наклонные асимптоты функций:

а) $y = \ln x$. Так как $y = \ln x$ определена при $x > 0$, ищем наклонную асимптоту при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - 0 \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Поэтому $y = \ln x$ не имеет наклонных асимптот (b не является числом);

б) $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$. Заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ уравнение асимптоты $y = x - \pi$, а при $x \to -\infty$ уравнение асимптоты $y = x + \pi$ (рис. 5.18.4);

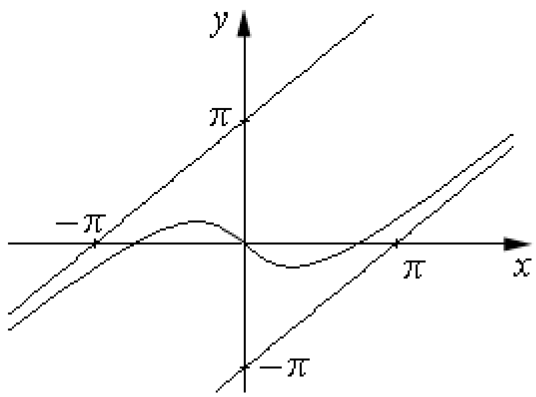


Рис. 5.18.4

в) $y = \frac{x^3+2}{2x^2+1}$.

$$\boldsymbol{k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x(2x^2+1)} = \frac{1}{2}},$$

$$\boldsymbol{b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2}{2x^2+1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{2(2x^2+1)} = 0}.$$

$y = \frac{1}{2}x$ – наклонная асимптота и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

5.19. Общая схема исследования графика функции

Эскиз графика функции можно построить, если знать его характерные особенности. Для этого надо провести следующие исследования:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти точки разрыва, определить характер разрыва.
5. Выяснить вопрос о существовании асимптот.
6. Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Найти области сохранения выпуклости, точки перегиба.

Пример.

Построить график функции $\boldsymbol{y = \frac{x}{x-1}}$. Будем следовать изложенной, выше схеме:

1. $\boldsymbol{x \neq 1}$.

2. Функция не является четной, нечетной, периодической.

3. $\boldsymbol{y = 0} \iff \boldsymbol{x = 0}$, график проходит через начало координат.

4. $x = 1$ – точка разрыва 2-го рода.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-0} \frac{x}{x-1} = -\infty.$$

5. В силу 4 прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. Выясним, существуют ли наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)x} = 0, \quad b = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)} = 1.$$

Итак, прямая $y = 1$ является наклонной (горизонтальной) асимптотой.

6. Так как

$$y' = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0,$$

то функция убывает на $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

7. Найдем 2-ю производную

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$y'' > 0 \iff x > 1$. Следовательно, при $x > 1$ график имеет выпуклость, направленную вниз.

$y'' < 0 \iff x < 1$. Следовательно, при $x < 1$ график имеет выпуклость, направленную вверх (рис.5.19.1).

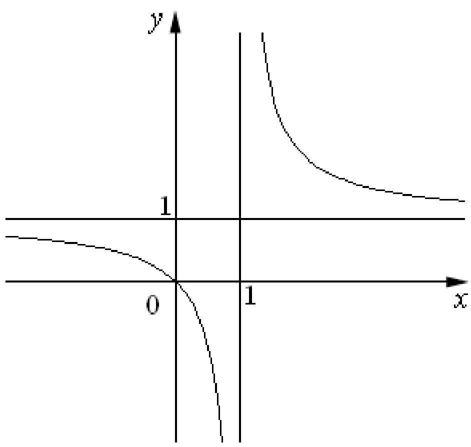


Рис. 5.19.1

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Писменный Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис – пресс, 2006. – 608 с.

2. **Данко П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов в 2 ч. Ч. 2/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ОНИКС; М.: Мир и Образование, 2006. – 416 с.