

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

И. В. Богомаз
О. В. Воротынова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Кинематика, статика.

Учебно-методическое пособие

Красноярск
СФУ
2011

УДК 531
ББК 22.21
Б 74

Рецензенты:

Н. И. Иванова, д. физико-математических наук, проф. кафедры «Физика» института фундаментальной подготовки СФУ г. Красноярск

Р. А. Сабиров, канд. техн. наук, доц. кафедры «Техническая механика» СибГАУ

Богомаз И.В.

Б 74 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. Кинематика, статика.: Учеб.-метод. пособие/ И. В. Богомаз, О. В. Воротынова. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. – 178 с.

ISBN 978-5-7638-2468-1

Материал учебно-методического пособия представлен в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по подготовке дипломированного специалиста по направлению 270800 «Строительство» (квалификация бакалавр). В пособии приведено краткое изложение теоретического материала, основных понятий и формулировок по двум разделам «Теоретической механики»: «Кинематика» и «Статика». Рассмотрено решение основных типовых задач по указанным разделам с использованием теоретических основ и методик расчетов, принятых в строительной отрасли. В приложении дано содержание контрольных работ для самостоятельной работы студентов. Пособие адресовано студентам строительных специальностей заочной формы обучения.

УДК 531
ББК 22.21
©Сибирский
федеральный
университет, 2011
© И. В. Богомаз, 2011 г.
© О. В. Воротынова, 2011 г.

ISBN 978-5-7638-2468-1

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – дисциплина, при изучении которой студенты в первую очередь могут проследить функционирование математической модели и сопоставить ее с реальным процессом. Апробация теории позволяет закрепить знания, полученные при изучении математического анализа, алгебры, аналитической геометрии и вычислительной математики. Стоит отметить, что все эти дисциплины используются во взаимосвязи. В их кругу теоретическая механика занимает особое место.

Это наука о законах механического движения и взаимодействия материальных тел. Имея технические корни, она развивается в теснейшей связи с курсом механики деформируемого твердого тела (и особенно с одним из ее разделов – сопротивлением материалов).

Сопротивление материалов является в большей степени феноменологической дисциплиной (т. е. дисциплиной, базирующейся на предположениях, допущениях и гипотезах). Теоретическая механика же является аксиоматической наукой. Объект ее исследования – математическая модель – позволяет широко использовать практически все разделы математики. Студенту необходимо найти такое сочетание математической строгости и практического применения материала, которое бы обеспечило плавный переход от чистой математики к сугубо техническим дисциплинам.

Для изучения курса важно иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах широко применяется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, геометрически и аналитически находить сумму векторов, скалярное и векторное произведения, а также знать их свойства и правила дифференцирования.

Кроме того, важно уяснить сущность каждого излагаемого вопроса. Особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

При изучении учебного курса «Теоретическая механика» студент заочного отделения знакомится с математическими моделями реальных явлений и существующими методами расчета, которые базируются на знаниях, полученных при изучении аналитической геометрии и линейной алгебры, векторной алгебры, высшей алгебры, основ математического анализа. Темы, знание которых необходимо для изучения теоретической механики, приведены в таблице.

Таблица

Наименование дисциплины	Раздел	Тема
Математика	Аналитическая геометрия и линейная алгебра	Алгебраические преобразования, решение алгебраических уравнений первого и второго порядка, Евклидова геометрия, тригонометрия, функции и графики аналитических и трансцендентных функций
	Векторная алгебра	Системы координат, преобразование систем координат, понятие вектора и линейные операции над ним, проекции векторов на оси, геометрическое и аналитическое сложение векторов, скалярное и векторное произведения векторов, решение векторных уравнений, кривые второго порядка, параметрическое задание функций
	Высшая алгебра	Системы линейных уравнений, определители, квадратичные формы, Евклидовы пространства, вычисление корней многочленов
	Основы математического анализа	Дифференцирование функций, экстремумы функций, геометрические приложения производных, неопределенный и определенный интегралы, дифференциальные уравнения, ряды

Основным документом, определяющим необходимый объем знаний студентов, является программа курса, составленная на основе государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Процесс овладения студентами определенными знаниями и навыками, складывается из самостоятельного изучения соответствующих разделов курса по учебникам и выполнения контрольных работ.

Содержание контрольных работ и порядок их выполнения представлены в приложении данного учебного пособия.

Программа учебного курса «Теоретическая механика»

Программа разбита на четыре модуля: модуль 1 содержит раздел «кинематика» [1, 3]; модуль 2 включает в себя раздел «статика» [1, 3]; модули 3 и 4 содержат разделы «динамика» и «аналитическая механика» соответственно [2, 4]. В этом учебном пособии представлены два модуля: модуль 1 «кинематика», модуль 2 «статика».

Модуль 1. Кинематика

1. Предмет кинематики. Основные понятия, задачи кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Кинематика точки. Траектория, скорость, ускорение точки. Векторный способ задания движения точки. Векторы скорости и ускорения точки (годограф скорости). Координатный способ задания движения. Определение скорости и ускорения точек по их проекциям на координатные оси [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

2. Естественный способ задания движения точки – определения. Оси естественного трехгранника. Скорость и ускорение точки в проекциях на оси естественного трехгранника, касательное и нормальное ускорение точки. Скорость точки в полярных координатах; ускорение точки в полярных координатах. Простейшие движения твердого тела. Основная теорема кинематики [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

3. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

4. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение. Уравнение вращательного движения тела [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

5. Скорость и ускорение точек твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси. Преобразование простейших движений. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений (уравнения Эйлера) [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

6. Сложное движение точки. Основные понятия – абсолютное, относительное и переносное движения. Теорема о сложении скоростей. Сложение скоростей точки в общем случае переносного движения. Сложение ускорений точки в общем случае переносного движения. Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

7. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Уравнения движения плоской фигуры (разложение плоского движения на поступательное движение вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса). Скорости точек твердого тела при плоскопараллельном движении – теорема. Мгновенный центр скоростей – теорема. Определение скоростей точек плоской фигуры (мгновенно-поступательное и мгновенно-вращательное движение) [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

8. Ускорение при плоскопараллельном движении твердого тела – теорема. Основные способы вычисления углового ускорения при плоском движении, аналитический и геометрический способы [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

Модуль 2. Статика

1. Введение в статику (история науки). Предмет изучения. Основные понятия: материальная точка, абсолютно твердое тело, механическая система, сила, система сил, уравновешенная система сил, равнодействующая системы сил, силы внешние и внутренние.

Исходные положения (аксиомы) статики. Связи и реакции связей [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

2. Система сходящихся сил. Приведение к равнодействующей. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Условия равновесия системы сходящихся сил. Геометрические и аналитические

условия равновесия. Теорема о трех непараллельных силах. Примеры [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

3. Параллельные силы. Приведение к равнодействующей двух сил, направленных в одну сторону. Приведение к равнодействующей двух сил, направленных в разные стороны [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

4. Теория пар сил. Пара сил. Векторный момент пары сил. Основные теоремы. Сложение пар сил в плоскости и пространстве. Условия равновесия пар сил. Метод сечения [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

5. Момент силы. Момент силы относительно центра и оси. Момент силы относительно точки в плоскости. Приведение силы к заданному центру. Теорема Пуансо. Главный вектор и главный момент системы сил. Плоская система сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей системы сходящихся сил. Приведение плоской системы сил к простейшему виду. Частные случаи приведения плоской системы сил к заданному центру [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

6. Условия равновесия сил. Система сил, произвольно расположенных на плоскости. Условия равновесия произвольной системы сил. Равновесие плоской системы сил (основная форма условий равновесия). Реакция заделки. Вторая форма условий равновесия. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов). Пространственная заделка [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

7. Равновесие системы твердых тел. Определение реакций опор составных конструкций. Устойчивость тел при опрокидывании. Рычаг [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

8. Плоские стержневые фермы. Общая характеристика и классификация ферм. Определение усилий в стержнях простейших ферм. Способ сплошных сечений (способ Риттера, или способ моментной точки). Способ проекций (способ вырезания узлов) [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

9. Равновесие при наличии сил трения. Трение скольжения при покое (сцепление) и при движении. Коэффициент трения. Закон Амонтона - Кулона. Угол и конус трения. Область равновесия. Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность. Трение качения; коэффициент трения качения [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

10. Частные случаи пространственной системы сил. Изменение главного момента при перемене центра приведения. Инварианты системы. Частные

случаи приведения пространственной системы сил. Динамический винт. Уравнение центральной линии [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

11. Центр параллельных сил и центр тяжести. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Методы определения центров тяжести. Центр тяжести простейших тел. Статические моменты и центр тяжести [1, 3, 5, 6, 8, 9, 10].

1. ОСНОВНЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА

1.1. Прямоугольная декартова система координат

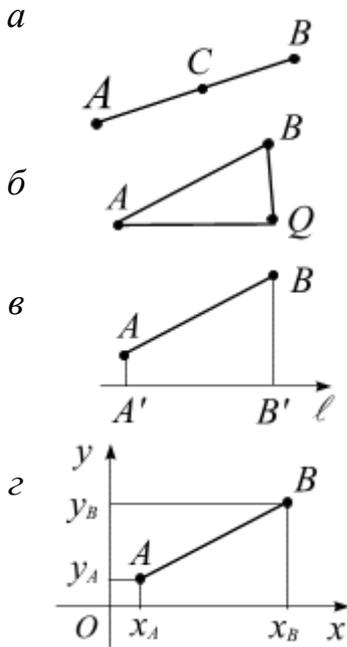


Рис. 1.1

Наиболее элементарными измерениями в механике, кроме простого счета, являются измерения расстояний. Расстояние вдоль заданной прямой AB аддитивно, т. е. его можно представить в виде алгебраической суммы двух расстояний $AC + CB = AB$, где точка C лежит между точками A и B (рис. 1.1, а). Но если два расстояния взяты не на одной прямой, то их сумма не может быть определена однозначно без дополнительных условий. Если A, Q, B – три точки, то расстояние AB определяется не только расстояниями AQ и QB , т. е. $AB \neq AQ + QB$ (рис. 1.1 б).

Рене Декарт предложил задавать положение точек отрезка с помощью системы параллельных отрезков AA' и BB' , перпендикулярных к исходной прямой ℓ . В дальнейшем была введена вторая ось, перпендикулярная первой. Система двух ортогональных осей получила название декартовой системы координат (рис. 1.1, в).

Декартова плоская система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми – осями координат, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан отрезок единичной длины. Точка пересечения осей координат (O) называется началом координат. Одна из осей координат (Ox) называется осью абсцисс, другая – осью ординат (Oy).

Расстояние между точками A и B определяется по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Декартова система координат в трехмерном пространстве задается аналогично случаю плоскости: осью абсцисс (Ox), осью ординат (Oy), осью аппликат (Oz) и началом координат O (рис. 1.2).

Возможны две прямоугольные декартовы системы координат, которые никакими движениями в пространстве не могут быть совмещены друг с другом. Одна из них правая, другая – левая. Наиболее употребляемой системой координат является правая (рис. 1.2, а). Систему координат свяжем с поверхностью земли. Пусть наблюдатель стоит на земле лицом на север, правая его рука направлена на восход солнца, т. е. на восток. Совместим с наблюдателем систему трех ортогональных осей $Oxyz$ с поверхностью земли, при этом ось Oy направим на север, ось Ox будет указывать вместе с правой рукой на восток, ось Oz направим вертикально на звезды.

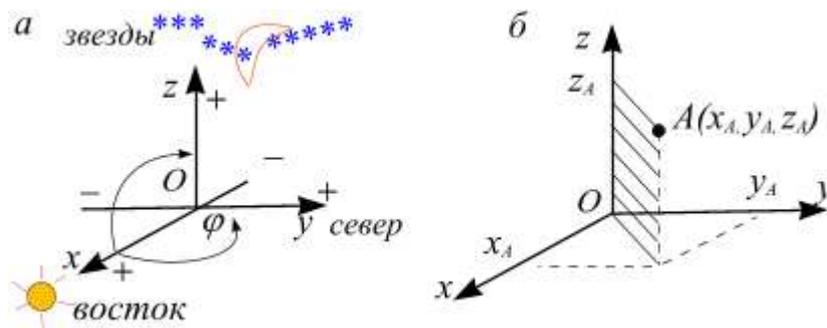


Рис. 1.2

Такая система называется правой декартовой системой координат. В правой системе координат поворот оси Ox в плоскости Oxy и в плоскости Oxz против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке – отрицательным.

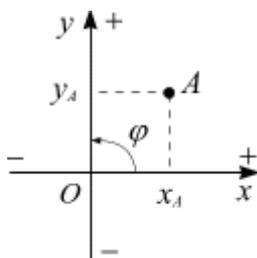


Рис. 1.3

Положение геометрической точки A в декартовой системе координат определено тремя независимыми координатами: x_A, y_A, z_A (рис. 1.2, б). Плоская декартова система координат показана на рис. 1.3.

Положение геометрической точки A в плоской системе координат определено двумя независимыми координатами – x_A, y_A .

1.2. Графики аналитических функций в декартовой системе координат

Элементарные функции – функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композиций из следующих основных элементарных функций:

1. *Линейная функция.*

Если переменные y и x пропорциональны, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением

$$y = kx + b ,$$

где k – постоянная величина (*коэффициент пропорциональности*).

График *прямой пропорциональности* – прямая линия, проходящая через начало координат и образующая с осью X угол α , причем $\operatorname{tg} \alpha = k$ – коэффициент пропорциональности или *угловой коэффициент*. На рис. 1.4 показаны графики линейных функций.

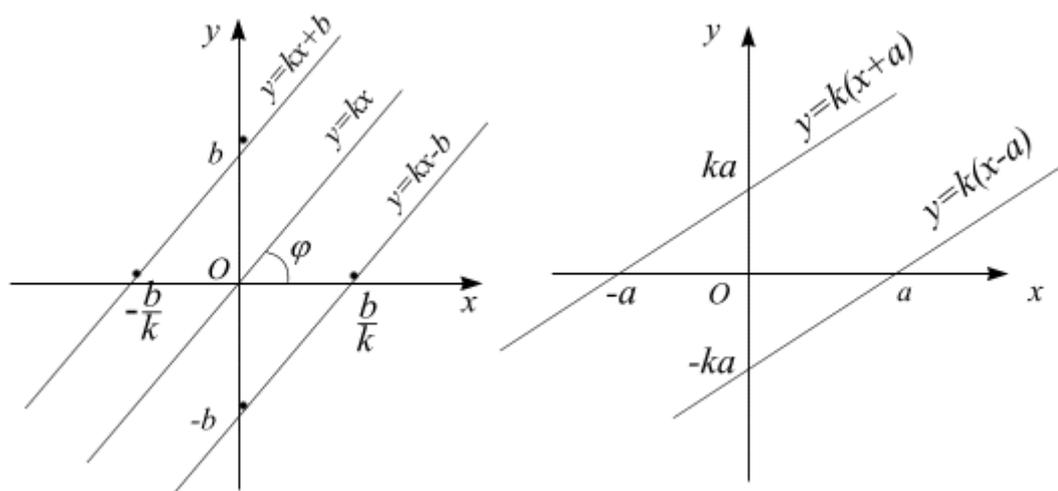


Рис. 1.4

2. *Квадратичная функция:* $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

График квадратичной функции – парабола.

Свойства функции и вид её графика определяются в основном значениями коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ (рис. 1.5).

Нули квадратичной функции:

при $D > 0$ существует два нуля: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$;

при $D = 0$ существует один нуль: $x_1 = -b/(2a)$, при $D < 0$ нулей нет.

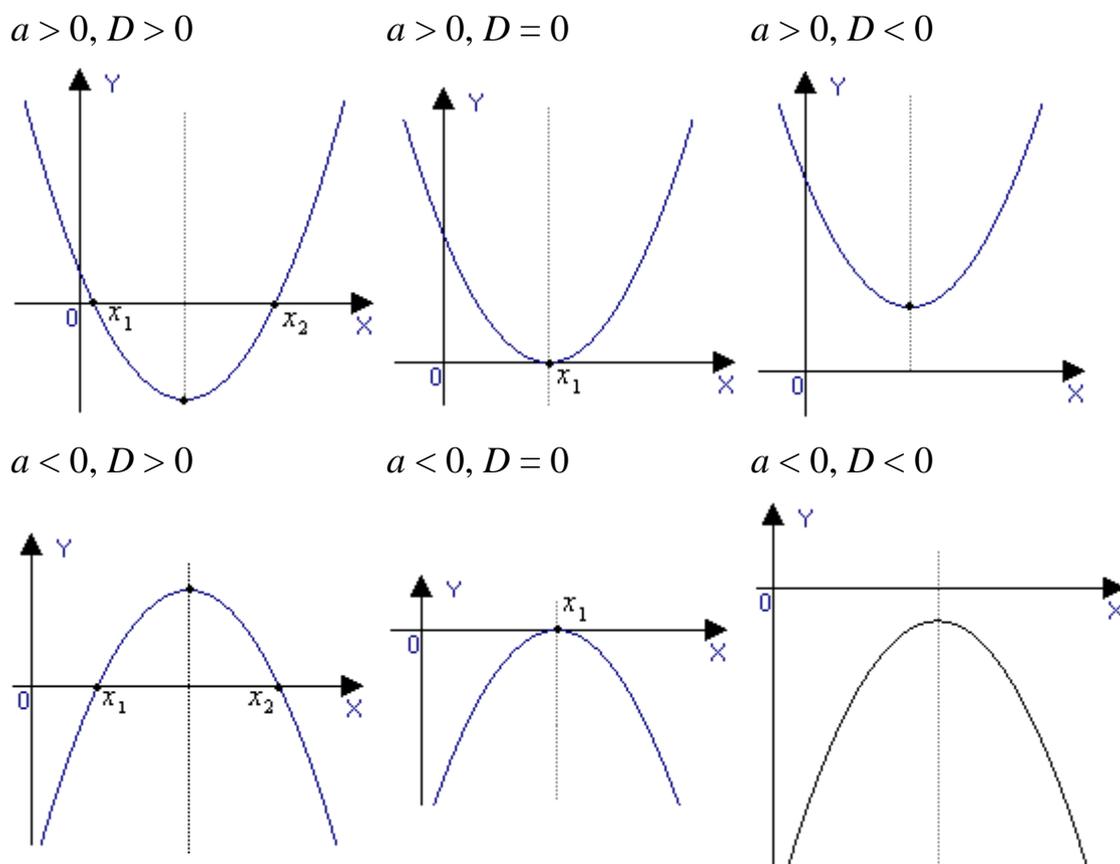


Рис. 1.5

Разложение на линейные множители:

при $D > 0$ $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

при $D = 0$ $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$,

при $D < 0$ функцию разложить на множители нельзя.

Выделение полного квадрата:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Квадратичная функциональная зависимость. Алгебраическая функция вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа, называется функциональной зависимостью второй степени (порядка) или квадратичной функциональной зависимостью (кривые второго порядка). Графиками этой зависимости во множестве действительных чисел могут быть или окружности, или эллипсы, или параболы, или гиперболы.

Окружность. Каноническое (простейшее) уравнение окружности (рис.1.6, а):

$$(x)^2 + (y)^2 = R^2;$$

параметрическое задание окружности:

$$x = R\sin(t), \quad y = R\cos(t).$$

Эллипс. Каноническое уравнение эллипса (рис.1.6, б):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Параметрическое задание эллипса:

$$x = a\sin(t), \quad y = b\cos(t).$$

Графики окружности и эллипса представлены на рис. 1.6, а, б.

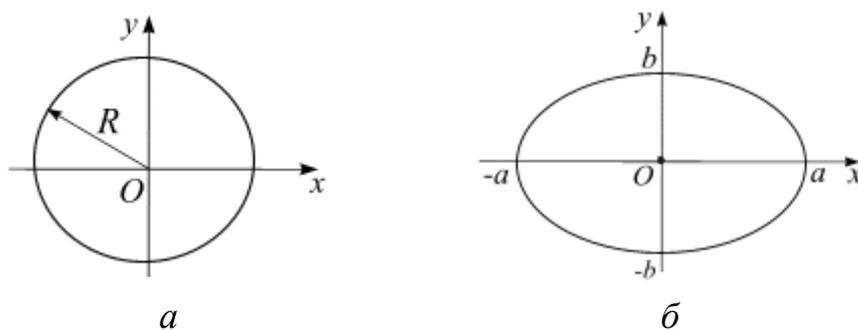
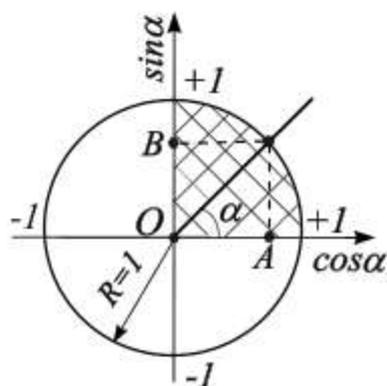


Рис. 1.6

1.3. Элементы тригонометрии

Рассмотрим круг единичного радиуса $R=1$ (рис. 1.7). Длина окружности круга единичного радиуса равна $\ell = 2\pi R \equiv 2\pi$, откуда

$$\pi(\text{радиан}) \equiv \frac{\text{длина окружности}}{\text{диаметр}} \cong 3,14$$



Градусная и радианная мера:

$$1^\circ \approx 0,017 \text{ рад.}; 180^\circ \equiv \pi(3,14) \text{ рад.};$$

$$1 \text{ рад.} \equiv \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3,14} \approx 57^\circ 3'.$$

Рис. 1.7

Таблица значений тригонометрических функций в смысле главного значения, т. е. в первом квадранте (рис. 1.7).

радиан	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
градус	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\sin \alpha \equiv OB$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	1
$\cos \alpha \equiv OA$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	0

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Функции двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Формулы приведения:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp \sin \alpha; \quad \cos \beta = \cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos \alpha; \\ \sin \beta &= \sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos \beta = \cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp \sin \alpha; \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) &= -\cos \alpha; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha. \end{aligned}$$

Графики тригонометрических функций

При построении тригонометрических функций мы используем *радианную* меру измерения углов. Тогда функция $Y = \sin X$ представляется графиком (рис. 1.8). Эта кривая называется *синусоидой*.

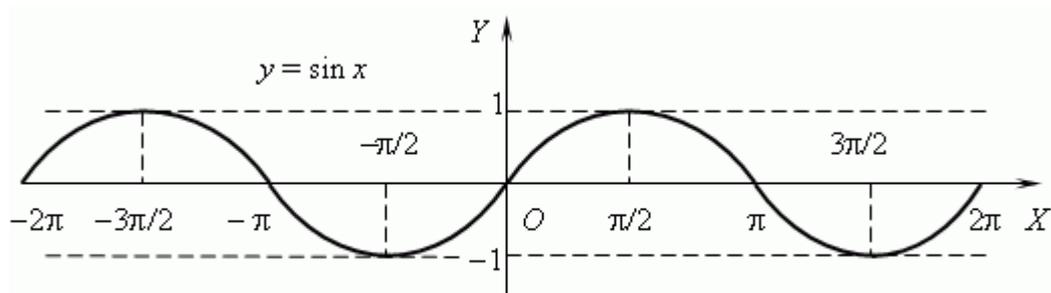


Рис. 1.8

График функции $Y = \cos X$ представлен на рис. 1.9; это кривая называется также синусоидой, полученная в результате перемещения графика $Y = \sin X$ вдоль оси X влево на $\pi/2$.

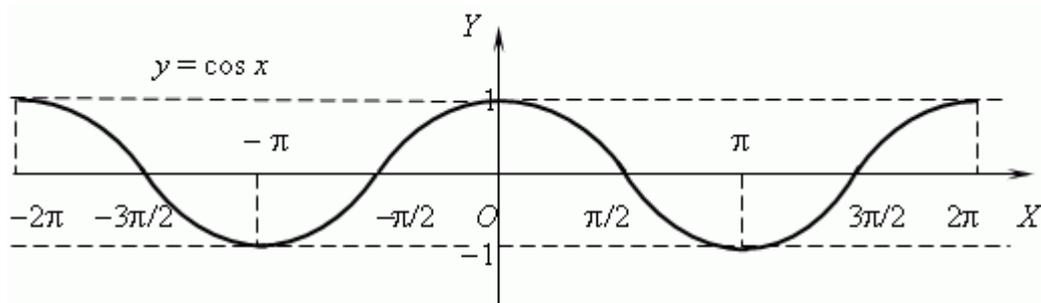


Рис 1.9

Характеристики и свойства тригонометрических функций:

область определения: $-\infty < x < +\infty$; область значений: $-1 \leq y \leq +1$;

функции периодические, их период равен 2π ;

функции ограниченные ($|y| \leq 1$), всюду непрерывные.

1.4. Векторы

Основные понятия. Многие физические величины характеризуются

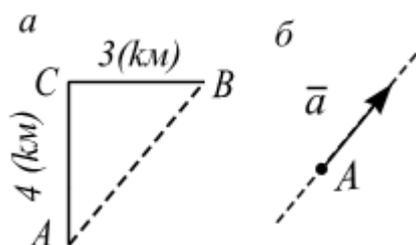


Рис. 1.10

одним параметром – модулем. Например, известно расстояние, которое прошел студент (допустим, он прошел 17 км) – при этом все равно, в каком направлении он шёл, но известна температура воздуха в день его прогулки, например, $+25^\circ$. Такие величины, как расстояние между точками и температура, называют **скалярными**. Бывают обстоятельства, когда необ-

ходимо знать и модуль, и направление физической величины. Например, если пункт A находится в 5 (км) к северо-востоку от пункта B , то недостаточно направить студента, указав расстояние в 5 (км) для того, чтобы он достиг пункта B . Необходимо задать направление движения. Комбинация модуля и направления физической величины называется **векторной величиной**, или просто **вектором**.

Важность понимания различий между векторными и скалярными величинами состоит в том, что для этих величин разные правила сложения, вычитания и умножения. Для скалярных величин эти правила прописаны в алгебре, для векторных величин – в векторной алгебре. Например, полное рас-

стояние между пунктами A и B (по траектории движения ACB) вычисляется алгебраическим сложением (рис. 1.10, a):

$$AC + CD = 4 + 3 = 7 \text{ км}$$

а полное перемещение вычисляется расстоянием между пунктами A и B , которое равно

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ км}.$$

Вектор обозначается буквой с чертой (или стрелкой) над ней – \vec{a} (\vec{a}) и изображается направленным отрезком, длина которого в некотором масштабе равна модулю представляемой вектором физической величины (рис. 1.10, b). Вектор характеризуется *точкой приложения* (точка A), модулем $|\vec{a}| \equiv a$ и *линией действия* – прямой, вдоль которой направлен вектор. Вектор, модуль которого $|\vec{a}| = 1$, называется *единичным вектором*. Если направление единичного вектора совпадает с направлением вектора, единичный вектор называется *ортом*. Орты, направленные по осям Ox , Oy , Oz декартовой системы координат, обозначаются \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные орты (рис. 1.11).

Проекция вектора на ось. Изобразим вектор \vec{a} (рис. 1.11). Опустим перпендикуляры из начала A и конца B вектора на оси Ox , Oy , Oz – получим отрезки a_x , a_y , a_z , называемые проекциями вектора \vec{a} на оси Ox , Oy , Oz .

Каждый вектор \vec{a} может быть единственным образом разложен на сумму векторов, параллельных единичным ортам \vec{i} , \vec{j} плоской системы:

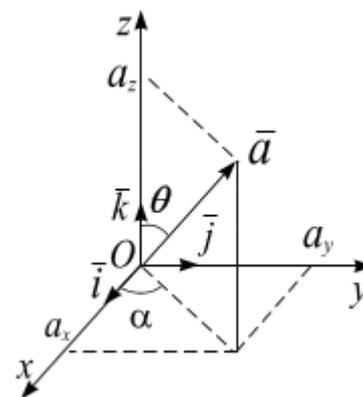


Рис. 1.11

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (a)$$

Скаляры a_x, a_y, a_z называются координатами вектора \vec{a} в системе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и обозначается это так:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}. \quad (б)$$

Записи (а) и (б) равносильны.

Координаты вектора a_x, a_y, a_z и модуль вычисляются по формулам:

$$a_x = a \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha, a_y = a \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha, a_z = a \cos \theta, a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Проекция вектора на ось есть скалярная величина, равная произведению модуля проектируемого вектора на косинус угла между положительным направлениями оси и направлением вектора (рис. 1.12):

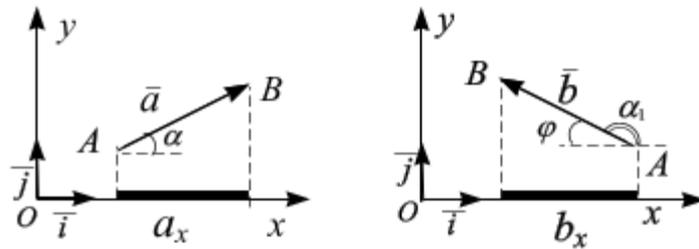


Рис. 1.12

$$a_x = a \cdot \cos \alpha; b_x = b \cdot \cos \alpha_1 = b \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = -b \cdot \cos \varphi.$$

Линейные комбинации векторов. Сложение векторных величин производится по правилу параллелограмма: сумма двух векторов \bar{a} и \bar{b} , приведенных к общему началу, есть третий вектор \bar{c} , длина которого равна длине параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} , а направлен вектор \bar{c} от точки A к точке B (рис. 1.13):

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}.$$

Модуль вектора $|\bar{c}| \equiv c$ вычисляется по формуле

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha \wedge \beta)}.$$

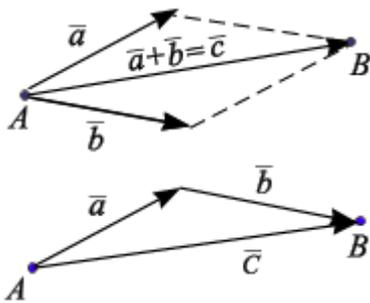


Рис. 1.13

Силовой многоугольник. Суммируют несколько векторов построением векторного многоугольника. Слагаемые векторы путем параллельного переноса последовательно при-

страивают один за другим так, что начало последующего вектора совпадает с концом предыдущего, тогда вектор, замыкающий полученный многоугольник, является суммой заданных слагаемых, причём его начало совпадает с началом первого из слагаемых векторов, а конец – с концом последнего (рис. 1.14, а). *Разность двух векторов.* Разностью векторов $(\bar{a} - \bar{b})$ называется вектор \bar{d} (диагональ BD) – такой, что сумма векторов $\bar{d} + \bar{b} = \bar{a}$ (рис. 1.14, б)

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{d}.$$

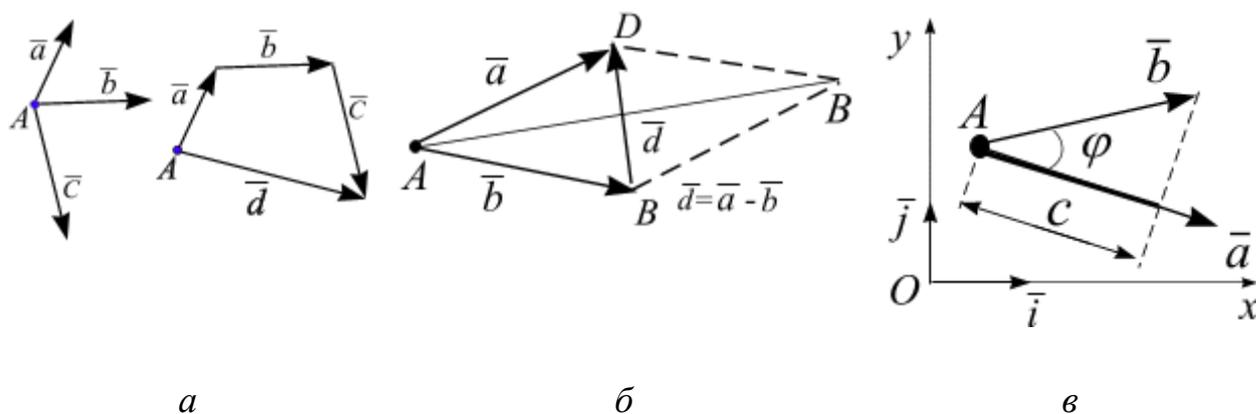


Рис. 1.14

Скалярное умножение векторов. Скалярным умножением векторов \bar{a} и \bar{b} (обозначается $\bar{a} \cdot \bar{b}$) называется скаляр, определяемый равенством

$$c = \bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi,$$

где угол φ – угол между векторами \bar{a} и \bar{b} , приведенными к общему началу (рис. 1.14, в).

Если заданы векторы $\bar{a} \{a_x, a_y\}$ и $\bar{b} \{b_x, b_y\}$, то скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$c = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Радиус-вектор. Положение точки A в пространстве удобно характеризовать *радиус-вектором*. Если каждому значению скалярного аргумента t поставить в соответствие вектор $\bar{r}(t)$ (расстояние между точкой A_i и полюсом O фиксируется модулем $|\bar{r}_i(t)|$, направление $\bar{r}(t)$ фиксируется углом φ_i (рис.1.15)), то функция $\bar{r}(t)$ будет называться радиус-вектором скалярного

аргумента. Если начало вектора $\vec{r}(t)$ (радиус-вектора) поместить в произвольную точку O , то конец радиус-вектора $\vec{r}(t)$ опишет пространственную кривую, которую называют *годографом* (записыватель пути) векторной функции (рис. 1.15). Если t означает время, то $\vec{r}(t)$ фиксирует положение материальной точки в пространстве в любой момент времени, т. е. характеризует движение

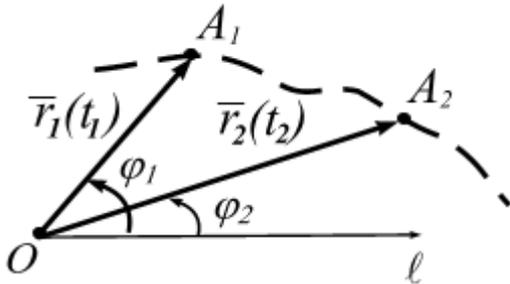


Рис. 1.15

материальной точки. Если радиус-вектор \vec{r} разложить по базисным векторам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} прямоугольной системы координат, то

$$\vec{r}(t) = x_A(t) \cdot \vec{i} + y_A(t) \cdot \vec{j} + z_A(t) \cdot \vec{k},$$

причем компоненты $x_A = (t)$, $y_A = (t)$, $z_A = (t)$ являются координатами точки A в прямоугольной системе координат (рис.1.16, а).

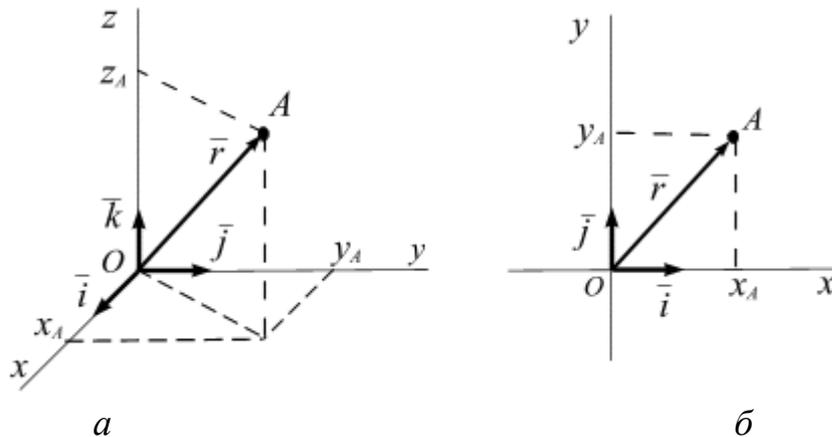


Рис. 1.16

В плоской прямоугольной системе координат (рис.1.16, б) радиус-вектор \vec{r} раскладывается по базисным векторам \vec{i} , \vec{j} так:

$$\vec{r}(t) = x_A(t) \cdot \vec{i} + y_A(t) \cdot \vec{j}.$$

1.5. Основы математического анализа

Дифференцирование функций. Для решения многих задач требуется найти разность значений функции в двух точках. Так, средняя скорость материальной точки за промежуток времени Δt равна $V_{\text{cp}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$. Если рассматриваемое движение не является равномерным, то чем меньше выбран промежуток времени Δt , тем лучше указанная формула будет характеризовать движение точки. В идеале мы получаем понятие мгновенной скорости V : это предел, к которому стремится средняя скорость, когда $\Delta t \rightarrow 0$, то есть

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Эта и другие задачи приводят к понятию производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ конечный предел отношения при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда этот предел называется производной функции в точке x_0 :

$$f'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции $y = f(x)$ может также обозначаться одним из следующих способов: $y'_x(x_0)$, $\frac{df}{dx}$.

Геометрический смысл производной. Если $y = f(x)$ изображена своим графиком – кривой в декартовых координатах (рис. 1.17), то $f'_x(x_0) = \text{tg}\alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной к кривой в данной точке x_0 , отчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. В механике произ-

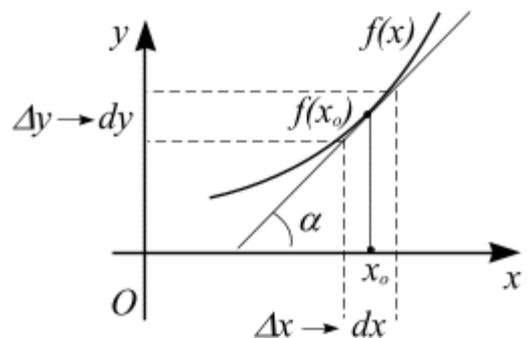


Рис. 1.17

водную по времени t часто обозначают точкой: $\dot{f}(t)$.

Если приращение функции $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ обозначить как Δy , то определение можно записать так:

$$f'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Линейную функцию $y = f'_x(x_0)(x - x_0)$ называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают df . Для функции x производная в каждой точке x_0 равна 1, то есть $dx = x - x_0$.

Поэтому пишут:

$$dy = f'_x dx.$$

Геометрически дифференциал функции dy – это приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы точки на dx (рис. 1.17).

Операция вычисления производной называется дифференцированием. Функция называется дифференцируемой в данной точке, если в этой точке существует ее производная.

Таблица производных

1	$C' = 0$	7	$(e^x)' = e^x$	13	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
2	$(a^x)' = a^x \ln a$	8	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	14	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}, m \in R$	9	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{1}{x^{n+1}}$	10	$(\sin x)' = \cos x$	16	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	11	$(\cos x)' = -\sin x$	17	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
6	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	12	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	18	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

Интегрирование функций. Первообразной функцией (или просто первообразной) для данной функции одной переменной $y = f(x)$, определенной в некоторой области S , называется такая функция $F(x)$, определенная в той же области, производная от которой равна $f(x)$.

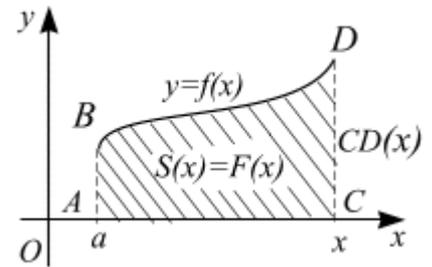


Рис. 1.18

Геометрический смысл первообразной. Если данная функция $f(x)$ изображена кривой в декартовых координатах, то первообразная численно равна площади $S(x)$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя ординатами: постоянной AB (при $x = a$) и переменной $CD(x)$ (при абсциссе x). Произвольно выбирая постоянную a , получаем различные первообразные. При этом площадь $S(x)$ понимается в алгебраическом смысле (рис.1.18):

$$\text{площадь фигуры } ABCD = \int_a^x f(x)dx = F(x) + a.$$

Процесс нахождения первообразной называется интегрированием. Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

Правила интегрирования

Неопределенный интеграл:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x), C \in R.$$

Свойства неопределенного интеграла:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx; \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Свойство линейности:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx.$$

Метод замены переменной:

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(f(x))df(x) = G(x) + C, \text{ где } G'(x) = g(x).$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u \cdot v' dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Свойства определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx; \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx.$$

Формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Справедливость ниже указанных формул легко проверить дифференцированием.

Таблица интегралов

1	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$	9	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
2	$\int X^m dx = \begin{cases} \frac{1}{a} X^{m+1} + c, (m \neq -1); \\ \frac{1}{a} \ln X + c, (m = -1). \end{cases}$	10	$\int \cos x dx = \sin x + c$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	11	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + c$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	12	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + c$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + c$	13	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$	14	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + c$
7	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	15	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
8	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$	16	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

1.6. Понятие об абсолютно твердом теле и его степенях свободы

Важным понятием в механике является число параметров, полностью определяющих положение всех точек рассматриваемой системы, в частности твердого тела. Эти параметры носят название степеней свободы.

Свободным называется тело, на перемещения точек которого не наложено никаких ограничений. Вычислим количество степеней свободы твердого тела в плоскости и пространстве.

Число независимых параметров, определяющих перемещение тела (точек тела) на плоскости или в пространстве называется числом его степеней свободы.

Плоскость. Положение точки на плоскости в системе координат Oxy определяется двумя независимости параметрами (координатами) – x_A, y_A (рис. 1.19, а), т. е. точка может независимо перемещаться в двух ортогональных направлениях Ox и Oy , следовательно, точка имеет две степени свободы.

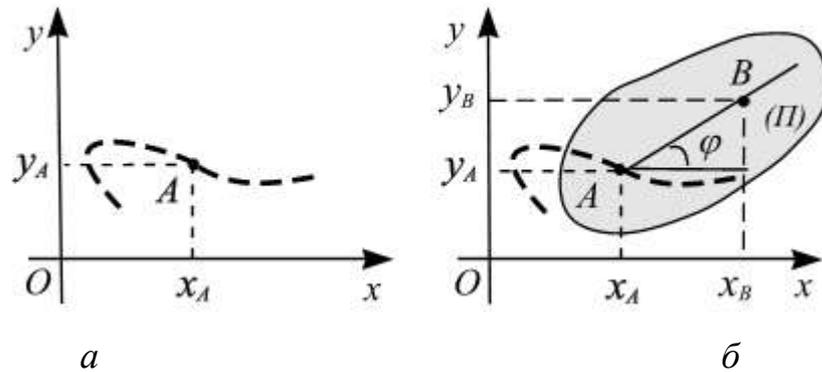


Рис. 1.19

Положение твердого тела характеризовать двумя параметрами не получится, необходимо зафиксировать еще одну точку, тогда положение твердого тела на плоскости будет определено четырьмя параметрами – координатами двух точек – $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ (рис.1.19, б).

Предположим, что при движении или взаимодействии с другими телами твердое тело не меняет своей геометрической формы, тогда расстояние между точками A и B будет оставаться неизменным:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \text{const.}$$

Такие твердые тела называют **абсолютно твердыми**. В теоретической механике реальные тела моделируются абсолютно твердыми телами.

Абсолютно твердым телом (или неизменяемой механической системой) называют твердое тело, расстояние между любыми точками которого не меняется при его движении и взаимодействии с другими телами.

Тогда четыре координаты x_A, y_A, x_B, y_B , определяющие положение абсолютно твердого тела, связаны между собой теоремой Пифагора:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (AB)^2. \quad (1.1)$$

Это уравнение принято называть *уравнением связи*. Тогда из четырех координат x_A, y_A, x_B, y_B независимы только три:

4 координаты – 1 уравнение связи → 3 независимых координаты.

Поэтому движение абсолютно твердого тела в плоскости должно описываться тремя независимыми параметрами. За независимые параметры принимают координаты любой точки $A – x_A, y_A$ (часто центра тяжести тела) и угол φ , который образуют жестко связанная с телом прямая AB и положительное направление оси Ox (рис. 1.19, б). Итак, положение абсолютно твердого тела в плоскости будет определяться тремя независимыми параметрами – x_A, y_A, φ и, следовательно, твердое тело при движении в плоскости будет иметь *три степени свободы*: тело может перемещаться вдоль каждой из осей и вращаться вокруг точки A . Точку A называют полюсом.

Число независимых перемещений тела определяет число его степеней свободы

Абсолютно твердое тело в плоскости имеет **три степени свободы**.

Пространство. Одна свободная точка в пространстве имеет три степени свободы. Рассмотрим свободное абсолютно твердое тело в пространстве (рис. 1.20). Положение твердого тела характеризовать двумя точками A и B в пространстве не получится, потому что тело может вращаться вокруг прямой AB , при этом координаты точек A и B меняться не будут. Необходимо зафиксировать еще одну точку, тогда положение тела в пространстве будет определяться заданием координат трех его точек, не лежащих на одной прямой – $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$. Положение тела в пространстве в декартовой системе координат будет характеризоваться *девятью параметрами*. Поскольку взаимное расположение точек A , B и C абсолютно твердого тела сохраняется (рис. 1.20), девять координат связаны между собой тремя уравнениями связи:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = L_1^2 \text{ – расстояние } AB;$$

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = L_2^2 \text{ – расстояние } AC;$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = L_3^2 \text{ – расстояние } BC.$$

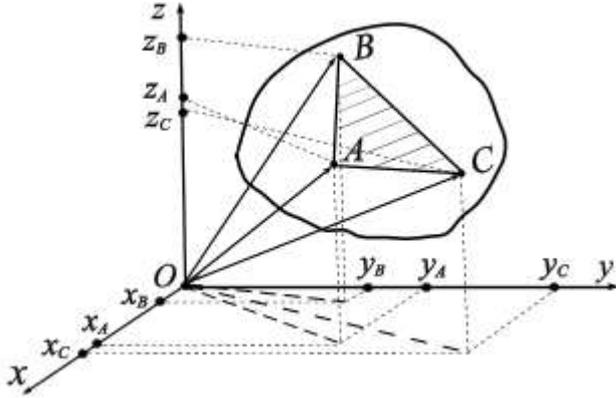


Рис. 1.20

На девять координат наложено три уравнения связи, следовательно, *независимых* координат остается только шесть, т. е. абсолютно твердое тело в пространстве имеет **шесть степеней свободы**: тело может независимо перемещаться вдоль каждой из осей и вращаться вокруг

каждой оси. За независимые параметры принимают координаты полюса A – x_A, y_A, z_A и углы поворота плоскости ABC вокруг каждой из осей, т. е. точка может независимо перемещаться в трех ортогональных направлениях Ox, Oy, Oz .

Если при движении или взаимодействии с другими телами твердое тело меняет свою геометрическую форму (деформируется), тогда расстояние между двумя точками не будет оставаться неизменным, т. е. координаты точек A, B, C не связаны между собой. В этом случае будем говорить о *деформируемом твердом теле*.

1.7. Инерциальная система отсчета

Начиная с Аристотеля (384–322 г. до н. э.) считалось, что движение тела всегда поддерживается некоторой действующей причиной и, как правило, только эта причина иссякает, тело немедленно останавливается. Только в XVII в. появилась и победила концепция движения, согласно которой движение по инерции, т. е. прямолинейное и равномерное движение тела, представляет собой неизменное состояние и не требует какой-либо поддерживающей силы. Тело, предоставленное самому себе, сохраняет неизменное состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, иными словами, сохраняет постоянную скорость – нулевую или конечную. Сформулировал принцип инерции итальянский ученый Галилео Галилей.

В различных системах отсчета математическая форма законов природы различна, однако существуют так называемые инерциальные системы отсче-

та, в которых эти законы имеют наиболее простой вид. *Инерциальной называется система отсчета, в которой материальная точка при отсутствии действующих на нее сил взаимодействия движется прямолинейно и равномерно, т. е. система, для которой справедлив принцип инерции Галилея.*

Принцип инерции Галилея устанавливает, что всякое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока внешние силы не выведут его из этого состояния, т. е. *состояния покоя и состояния прямолинейного и равномерного движения неразличимы.* С достаточной точностью такой инерциальной системой можно считать гелиоцентрическую систему координат. В большинстве технических задач инерциальная система отсчета может быть связана с Землей.

Классическая механика создана в XVII в. Галилео Галилеем (1564–1642), Рене Декартом (1596–1656), Христианом Гюйгенсом (1629–1695) и другими учеными XVII века.

В конечной форме классическая механика сформулирована Исааком Ньютоном. Ньютон изложил основы классической механики в более строгой, систематической и законченной форме, чем его предшественники, поэтому классическую механику называют «классической механикой Ньютона». В динамике изучаются механические движения (т. е. перемещения) материальных объектов под действием сил.

Сила считается в механике основным понятием. Силы не являются в механике какими-либо самостоятельными субстанциями, независимыми от материальных тел. Они создаются материальными телами и полями. Поэтому можно сказать, что посредством сил материальные тела действуют друг на друга, т. е. взаимодействуют. Сила при этом выступает как векторная количественная мера интенсивности взаимодействий. Силы не только изменяют скорость движения материальных тел, но и вызывают их деформации. Наиболее простым и наглядным примером деформируемого тела является сжатая или растянутая пружина.

Системы единиц. Для измерения всех механических величин достаточно ввести три основные единицы измерения. В международной системе единиц (СИ) основными единицами являются: метр (м), килограмм (кг), секунда (с). Наиболее значимые производные величины в системе единиц (СИ): площадь – A (м^2); объем (м^3); скорость – V ($\frac{\text{м}}{\text{с}}$); угловая скорость – ω ($\frac{\text{рад.}}{\text{с}}$); ус-

корение – a ($\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$), угловое ускорение – ε ($\frac{\text{рад.}}{\text{с}^2} \equiv \text{с}^{-2}$), сила – F (Н– ньютон),

$1\text{Н}=1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$, механическое напряжение σ (па – паскаль).

Движение материальных объектов всегда следует рассматривать относительно определенной системы отсчета. Оно совершается в пространстве с течением времени. В классической механике, в основу которой положены аксиомы Ньютона, пространство считается однородным, изотропным трехмерным – евклидовым пространством. Если тело не меняет своей формы и размеров при параллельном переносе, – значит, пространство однородно, в нем нет выделенных точек. Если тело не меняет формы и размеров при вращении, значит, пространство изотропно, в нем нет выделенных направлений. Движение в однородном изотропном пространстве не меняет формы и размеров тела – оно меняет лишь его положение относительно системы отсчета.

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Траектория, скорость, ускорение материальной точки

Траектория точки. Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее **траекторией**. Если в интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$ траектория – прямая линия, то движение в этом интервале называется *прямолинейным*, в противном случае движение называется *криволинейным*.

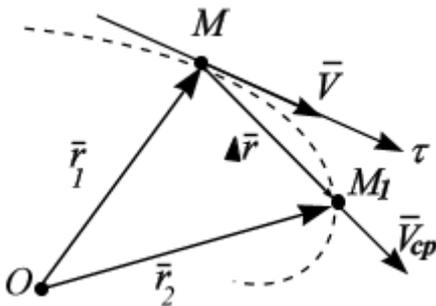


Рис. 2.1

Скорость точки. Пусть положение движущейся точки M относительно произвольно выбранного неподвижного центра O определяется в момент времени t радиус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r}(t)$, который соединяет движущуюся точку M с центром O (рис. 2.1).

За время $\Delta t = t_2 - t_1$ радиус-вектор изменится на $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.

Мгновенная скорость точки \vec{V} в момент времени t определяется как предел средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.1)$$

Производная по времени от функций обозначается точкой над символом этой функции, а вторая производная – двумя точками.

Вектор скорости приложен в точке M , направлен в сторону ее движения по предельному направлению вектора $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$, т. е. *совпадает с касательной к траектории в точке M* . Размерность скорости в СИ: $[\vec{V}] = \text{длина}/\text{время} = \text{м/с}$. Часто скорость выражают в км/ч = 0,28 м/с.

Скорость – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки

Ускорение точки. Пусть движущаяся точка M в момент времени t имеет скорость \vec{V} (рис. 2.2). В момент времени $t_1 = t + \Delta t$ эта точка занимает положение M_1 , имея скорость \vec{V}_1 . Чтобы изобразить приращение скорости $\Delta\vec{V}$ за время Δt , перенесем вектор скорости \vec{V}_1 параллельно самому себе в точку M , тогда $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$.

Ускорением точки \vec{a} в момент времени t называют предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.2)$$

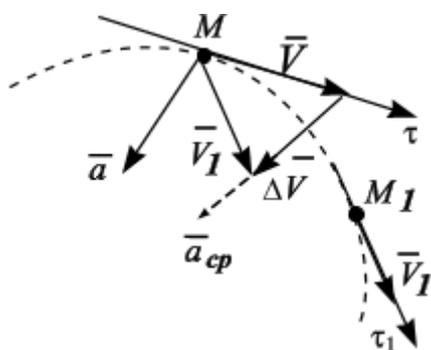


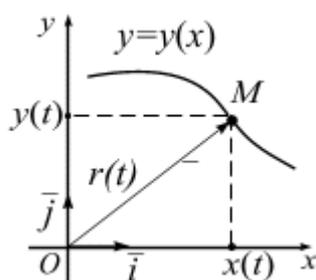
Рис. 2.2

Вектор ускорения \vec{a} всегда направлен внутрь вогнутости под любым углом к касательной к траектории движения (рис. 2.2). Размерность ускорения в СИ: $[\vec{a}] = \text{длина}/\text{время}^2 = \text{м}/\text{с}^2$.

Ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля и направления вектора скорости.

Движение точки на плоскости

Координатный способ задания движения точки. Зададим радиус-вектор $\vec{r}_1 = \vec{r}(t)$ в декартовой системе координат Oxy :



$$\vec{r}(t) = x_A(t) \cdot \vec{i} + y_A(t) \cdot \vec{j}.$$

Тогда движение точки можно задать уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (2.3)$$

Рис. 2.3

Уравнения (2.3) являются уравнениями движения точки, а также уравнениями траектории точки, заданными параметрически. Уравнение траектории в системе координат Oxy будет иметь вид функции $y = y(x)$ (рис. 2.3). Для получения этой зависимости следует из уравнений (2.3) исключить параметр t . Уравнение траектории в явном виде будет иметь вид функции $y = y(x)$.

Скорость и ускорение точки по модулю и направлению вычисляются по формулам:

$$V = |\bar{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \cos(\bar{V} \wedge \bar{i}) = \frac{\dot{x}}{V};$$

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \cos(\bar{a} \wedge \bar{i}) = \frac{\ddot{x}}{a}.$$

Содержание контрольных работ для студентов на тему «кинематика точки» дано в приложении (контрольная работа 1, задача 1).

Пример 2.1. Движение точки M по плоскости Oxy задано уравнениями движения

$$x = 2\sin(2t), \quad y = 4\cos(2t). \quad (\text{a})$$

Значения x и y – в метрах. Построить траекторию движущейся точки, вычислить скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = \frac{\pi}{4}$ и $t_2 = \frac{5\pi}{8}$.

Решение. Для построения траектории движущейся точки в декартовой системе координат определим область, в которой движется точка, т. е. область значений $x(t)$ и $y(t)$.¹ Так как $|\sin(2t)| \leq 1$ и $|\cos(2t)| \leq 1$, получаем:

¹ В теории функций одной переменной эта процедура определяет область задания (существования) функций $x(t)$ и $y(t)$. Область определения функций в классической кинематике всегда определена – $t \geq 0$.

$$-2 \leq x \leq 2; \quad -4 \leq y \leq 4.$$

Выделяем область, ограниченную полученными неравенствами, за эту область точка при движении не выходит (рис. 2.4) Исключим параметр t из уравнений движения (а). Для этого делим первое уравнение на 2, второе – на 4, возводим их в квадрат и складываем между собой:

$$\begin{array}{r} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2(2t) \\ + \\ \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \cos^2(2t). \\ \hline \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \sin^2(2t) + \cos^2(2t) \end{array}$$

Учитывая, что $\sin^2(2t) + \cos^2(2t) = 1$, получим:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1. \quad (б)$$

Траекторией движущейся точки является эллипс (рис. 2.4). Подставляя в (а) значение $t = 0$, находим:

$$x|_{t=0} = 2\sin(0) = 0; \quad y|_{t=0} = 4\cos(0) = 4 \text{ м.}$$

Точка в начальный момент времени занимает положение $M_0(0,4)$.

Определим направление движения точки. Уравнения движения (а) заданы возрастающей функцией $x = 2\sin(2t)$ и убывающей функцией $y = 4\cos(2t)$, поэтому при увеличении t координата « x » возрастает, а « y » убывает, следовательно, точка движется по эллипсу по часовой стрелке.

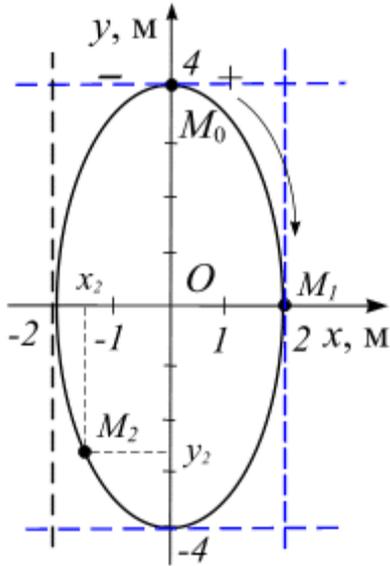


Рис.2.4

Определим модуль и направление вектора скорости точки M . Имеем:

$$\begin{aligned} V_x &= \dot{x} = 2 \cdot 2 \cos(2t) = 4 \cos(2t), \\ V_y &= \dot{y} = -4 \cdot 2 \sin(2t) = -8 \sin(2t), \end{aligned} \quad (\text{в})$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(4 \cos(2t))^2 + (8 \sin(2t))^2},$$

$$\cos(\bar{V}, \bar{x}) = \frac{4 \cos(2t)}{\sqrt{(4 \cos(2t))^2 + (8 \sin(2t))^2}}.$$

Определим модуль и направление вектора ускорения точки M . Имеем:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x = -4 \cdot 2 \sin(2t) = -8 \sin 2t, \quad a_y = \ddot{y} = \dot{V}_y = -8 \cdot 2 \cos(2t) = -16 \cos(2t).$$

$$a = \sqrt{(8 \sin(2t))^2 + (16 \cos(2t))^2}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{x}) = \frac{-8 \sin 2t}{\sqrt{(8 \sin(2t))^2 + (16 \cos(2t))^2}}. \quad (\text{г})$$

При $t_1 = \frac{\pi}{4}$ из (а) получаем, что точка M имеет координаты $x_1 = 2$, $y_1 = 0$, т. е. занимает положение (рис. 2.4) M_1 . Подставляя в (в) и (г) время $t_1 = \frac{\pi}{4}$, получим

$$\begin{aligned} V_{1x} &= (4 \cos 2t)_{t=\frac{\pi}{4}} = 4 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = 0, \quad V_{1y} = (-8 \sin 2t)_{t=\frac{\pi}{4}} = -8 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = -8 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \\ V_1 &= \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = 8 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \cos \alpha_1 = \cos(\bar{V}_1, \bar{x}) = \frac{0}{8} = 0; \quad \alpha_1 = -90^\circ \end{aligned}$$

$$a_{1x} = (-8 \sin 2t)_{t=\frac{\pi}{4}} = -8 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = -8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_{1y} = (-16 \cos 2t)_{t=\frac{\pi}{4}} = -16 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = 0,$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = 8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad \cos \beta_1 = \cos(\bar{a}_1, \bar{x}) = \frac{-8}{8} = -1, \quad \beta_1 = 180^\circ.$$

Откладываем значение скорости (рис. 2.5, а) и ускорения (рис. 2.5, б) точки M_1 на траектории.

При $t_2 = \frac{5\pi}{8}$ из (а) получаем, координаты точки

$$M_2: x_2 = -\sqrt{2} = -1,41 \text{ м}; \quad y_2 = -2\sqrt{2} = -2,83 \text{ м}.$$

Вычислим, используя (в) и (г), модуль и направление векторов скорости и ускорения.

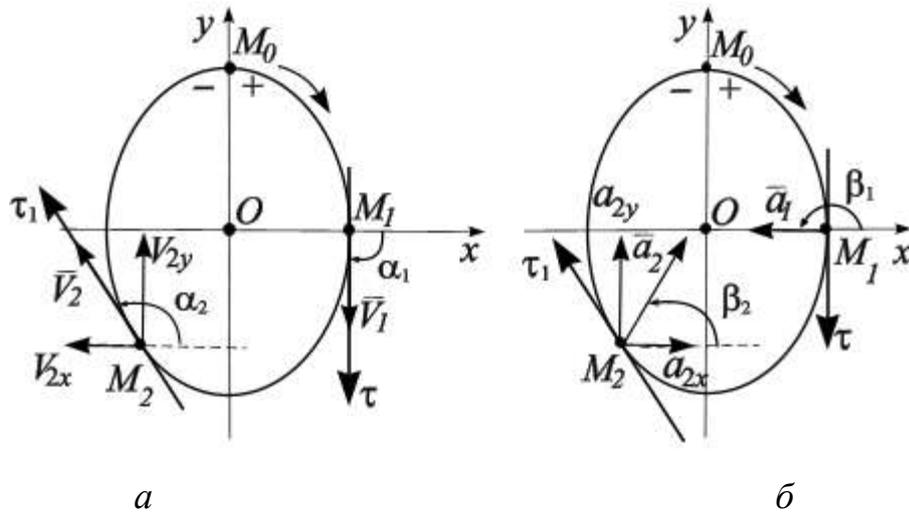


Рис. 2.5

Имеем:

$$V_{2x} = (4 \cos 2t)_{t=\frac{5\pi}{8}} = -2\sqrt{2} \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad V_{2y} = (-8 \sin 2t)_{t=\frac{5\pi}{8}} = 4\sqrt{2} \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \sqrt{8 + 32} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 6,3 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$\cos(\bar{V}_2, \bar{x}) = \cos \alpha_2 = \frac{V_{2x}}{V_2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \alpha_2 = 116,6^\circ$$

для ускорения

$$a_{2x} = (-8 \sin 2t)_{t=\frac{5\pi}{8}} = 4\sqrt{2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_{2y} = (-16 \cos 2t)_{t=\frac{5\pi}{8}} = 8\sqrt{2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = \sqrt{32 + 128} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} = 12,6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\cos(\bar{a}_2, \bar{x}) = \cos\beta_2 = \frac{a_{2x}}{a_2} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \beta_2 = 63,4^\circ.$$

Откладываем значение скорости (рис. 2.5, а) и ускорения (рис. 2.5, б) точки M_2 на траектории.

Вектор скорости точки совпадает по направлению с касательной к траектории в точках M_1 и M_2 , а вектор ускорения в точках M_1 и M_2 направлен во внутрь вогнутости траектории (к центру O).

Ответ: $V_1 = 8$ м/с, $a_1 = 8$ м/с²; $V_2 = 6,3$ м/с, $a_2 = 12,6$ м/с².

Естественный способ задания движения точки.

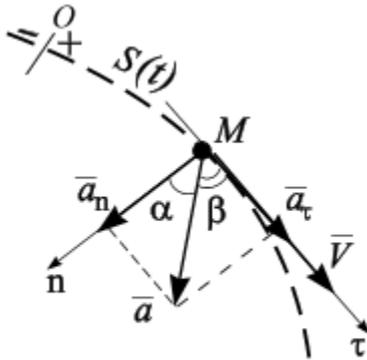


Рис. 2.6

При естественном способе задания движения точки задаются (рис. 2.6):

- траектория движения точки;
- начало и направление увеличения дуговой координаты S ;
- уравнение движения точки по траектории, как функция времени: $S = S(t)$, где S – дуговая координата, отчитываемая от начала движения.

Примером естественного способа задания движения является движение поезда: траектория и направление движения определены рельсами, а уравнение движения задано таблицей – расписанием движения поезда.

Движение точки рассматривается в координатах $M\tau n$. Единичный вектор $\bar{\tau}$ направлен по вектору скорости, единичный вектор \bar{n} перпендикулярен вектору $\bar{\tau}$, направлен по главной нормали кривой в сторону ее вогнутости (рис. 2.6).

Скорость точки M направлена по касательной и равна

$$\bar{V} = \dot{S}\bar{\tau} = V_{\tau}\bar{\tau}.$$

Ускорение \bar{a} точки M при естественном способе задания движения раскладывается на два – касательное ускорение $\bar{a}_\tau = \dot{S}\bar{\tau} = \dot{V}_\tau\bar{\tau}$, и нормальное

$$\text{ускорение } \bar{a}_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho}\bar{n} = \frac{V_\tau^2}{\rho}\bar{n}:$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Касательное ускорение a_τ характеризует изменение величины скорости, нормальное a_n – изменение направления вектора скорости.

Естественный способ задания движения это: $S(t)$ + траектория

$$\bar{V} = \dot{S}\bar{\tau} = V_\tau\bar{\tau}.$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau - \text{касательное ускорение};$$

$$a_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho} = \frac{V_\tau^2}{\rho} - \text{нормальное ускорение};$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \text{tg}\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n}.$$

Связь координатного и естественного способов заданий движения точки

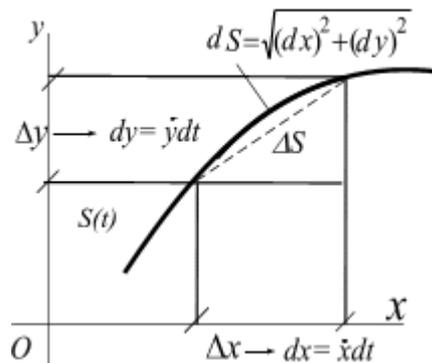


Рис. 2.7

Известно, что если точка движется в плоскости Oxy , элемент дуги ΔS связан с приращениями координат теоремой Пифагора (рис. 2.7):

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

При $t \rightarrow 0$ имеем

$$\Delta S \rightarrow dS, \Delta x \rightarrow dx, \Delta y \rightarrow dy,$$

тогда дифференциал дуги $dS(t)$ связан с дифференциалами функций $dx(t)$ и $dy(t)$ (рис.2.7):

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

$$x = x(t), y = y(t) \rightarrow \begin{cases} V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ a_n = \frac{|\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{cases},$$

$$S = S_0 + \int_0^t V_\tau(t) dt = S_0 \pm \int_0^t \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} dt$$

(знак + или – совпадает со знаком V_τ , так как $V_\tau = \pm \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$).

Пример 2.2.

Точка движется в плоскости Oxy . Уравнение движения точки задано координатами $x = x(t)$, $y = y(t)$, где x и y выражены в см, t – в с.

Исходные данные: $x = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (см); $y = 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ (см).

Требуется:

1. Записать уравнение траектории в явном виде: $y = f(x)$ (или $x = f(y)$).
2. Построить траекторию.
3. Определить положение точки в начальный момент времени $t_0 = 0$ и момент времени $t_1 = 1$ с, направление движения точки по траектории.
4. Вычислить вектор скорости \vec{V} и вектор ускорения \vec{a} точки в начальный ($t_0 = 0$) и конечный ($t_1 = 1$ с) моменты времени.

5. Задать движение точки естественным способом (вывести закон $S(t)$).
6. Геометрически и аналитически определить нормальную \vec{a}_n и касательную \vec{a}_τ составляющие ускорения точки в начальный и конечный моменты времени.
7. Найти радиус кривизны траектории в начальный и конечный моменты времени.

Решение

1. Выводим уравнение траектории в явном виде.

$$\begin{cases} x = 2 - 3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \text{ см}; & -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5; \\ y = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \text{ см}; & -1 \leq \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы: $x = 2 - 3\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)$; из второго уравнения системы: $\frac{y}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \Rightarrow \frac{y^2}{4} = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$. Получаем:

$$x = 2 - 3\left(1 - 2 \cdot \frac{y^2}{4}\right);$$

$$x = 2 - 3(1 - 0,5y^2);$$

$$x = 2 - 3 + 1,5y^2;$$

$$x = 1,5y^2 - 1, \text{ или } y = \pm \sqrt{\frac{2x+2}{3}}.$$

Таким образом, получаем уравнение параболы $x = 1,5y^2 - 1$.

2. Строим траекторию в масштабе 1:1 (рис. 2.8).

Ветви параболы вытянуты вдоль оси x . Вершина параболы: $y = 0$;
 $x = -1 \text{ см} \Rightarrow C(-1; 0)$.

y , см	± 1	± 2
x , см	0,5	5

3. Определяем положение точки в заданные моменты времени.

$$\begin{array}{l} \underline{t_0 = 0;} \\ \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right) = 2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1 \text{ см;} \\ y_0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = 2 \cdot 0 = 0 \text{ см;} \end{array} \right. \quad M_0(-1; 0); \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{t_1 = 1 \text{ с};} \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) = 2 - 3 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ см;} \\ y_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ см;} \end{array} \right. \quad M_1(0,5; 1). \end{array}$$

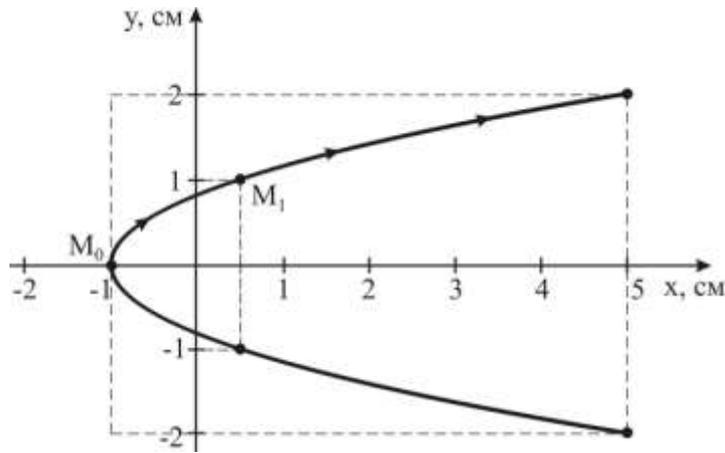


Рис. 2.8

Направление движения точки по траектории в промежуток времени от $t_0 = 0$ с до $t = 3$ с определяем по уравнениям движения $x(t)$ и $y(t)$:

- $x = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ – функция убывающая, но она в выражении со знаком « \leftarrow », значит, координата x возрастает;
- $y = 2\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ – функция возрастающая, значит, координата y возрастает.

Таким образом, движение точки по параболе в указанный промежуток времени происходит по часовой стрелке (по верхней ветви параболы) (рис. 2.8).

В целом, точка совершает колебательные движения по построенной параболе в области, указанной пунктиром на графике (рис. 2.8).

4. Вычисляем скорость и ускорение для заданных моментов времени.

Так как движение точки задано координатным способом, то скорость \vec{V} и ускорение \vec{a} определяются по их проекциям на координатные оси (рис. 2.9).

Скорость \vec{V} :

$$V_x = \dot{x} = -3 \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \right) \cdot \frac{\pi}{3} = \pi \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \text{ см/с};$$

$$V_y = \dot{y} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \text{ см/с};$$

$$\underline{t_0 = 0};$$

$$V_{x_0} = \pi \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right) = \pi \cdot 0 = 0 \text{ см/с};$$

$$V_{y_0} = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = \frac{3,14}{3} \cdot 1 \approx 1,05 \text{ см/с};$$

$$\underline{\underline{V_0}} = \sqrt{V_{x_0}^2 + V_{y_0}^2} = \sqrt{0^2 + 1,05^2} = \underline{\underline{1,05}} \text{ см/с};$$

$$\underline{t_1 = 1 \text{ с}};$$

$$V_{x_1} = \pi \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) = 3,14 \cdot 0,87 \approx 2,7 \text{ см/с};$$

$$V_{y_1} = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = \frac{3,14}{3} \cdot 0,87 \approx 0,9 \text{ см/с};$$

$$\underline{\underline{V_1}} = \sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2} = \sqrt{2,7^2 + 0,9^2} = \sqrt{7,29 + 0,81} \approx \underline{\underline{2,8}} \text{ см/с};$$

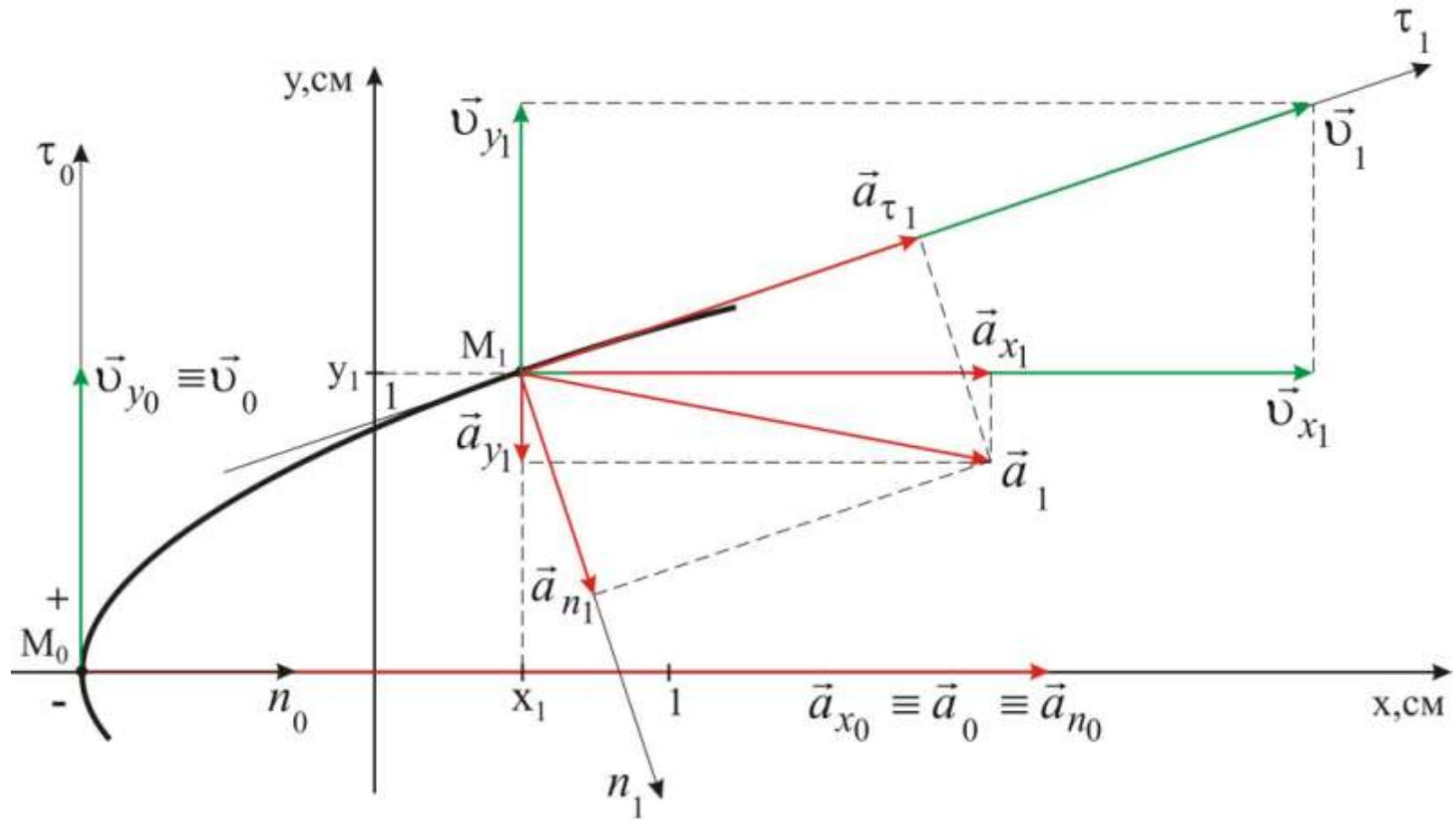


Рис. 2.9

Масштабы: чертёж в 1 см – 0,5 см; скоростей в 1 см – 0,233 см/с; ускорений в 1 см – 0,236 см/с².

Ускорение \vec{a} :

$$a_x = \dot{V}_x = \pi \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \dot{V}_y = \frac{\pi}{3} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \text{ см/с}^2;$$

$$\underline{t_0 = 0}; \quad a_{x_0} = \frac{\pi^2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 0\right) = \frac{3,14^2}{3} \cdot 1 \approx 3,3 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{y_0} = -\frac{\pi^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = -\frac{3,14^2}{18} \cdot 0 = 0 \text{ см/с}^2;$$

$$\underline{\underline{a_0}} = \sqrt{a_{x_0}^2 + a_{y_0}^2} = \sqrt{3,3^2 + 0^2} = \underline{\underline{3,3}} \text{ см/с}^2;$$

$$\underline{t_1 = 1 \text{ с}}; \quad a_{x_1} = \frac{\pi^2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) = \frac{3,14^2}{3} \cdot 0,5 \approx 1,6 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{y_1} = -\frac{\pi^2}{18} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = -\frac{3,14^2}{18} \cdot 0,5 \approx -0,3 \text{ см/с}^2;$$

$$\underline{\underline{a_1}} = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2} = \sqrt{1,6^2 + (-0,3)^2} = \sqrt{2,56 + 0,09} \approx \underline{\underline{1,6}} \text{ см/с}^2.$$

Выводим закон движения точки в естественной форме, имеем:

$$V_\tau(t) = \left. \frac{dS}{dt} \right| \cdot dt \rightarrow \int_{S_0}^S dS = \int_{t_0}^t v_\tau dt.$$

Для промежутка времени от $t_0 = 0$ с до $t = 3$ с имеем:

$$V_\tau \equiv V = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} \Rightarrow S \Big|_0^{S(t)} = \int_0^t \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} dt \rightarrow;$$

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_0^t \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} dt = \int_0^t \sqrt{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{\pi^2}{9} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)} dt = \\
&= \pi \int_0^t \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)} dt = \\
&= 2\pi \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \frac{1}{36}} dt = 2\pi \int_1^{\sin\frac{\pi}{6}t} \sqrt{z^2 + \frac{1}{6}} dz, \text{ см.}
\end{aligned}$$

5. Вычисляем нормальное и касательное ускорения.

а) Аналитически:

$$\underline{t_0 = 0;}$$

$$\underline{\underline{a_{\tau_0}}} = \frac{\dot{x}_0 \cdot \ddot{x}_0 + \dot{y}_0 \cdot \ddot{y}_0}{V_0} = \frac{0 \cdot 3,3 + 1,05 \cdot 0}{1,05} = \underline{\underline{0}} \text{ см/с}^2;$$

$$a_n = \frac{|\dot{y}_0 \ddot{x}_0 - \dot{x}_0 \ddot{y}_0|}{V_0} = \frac{|1,05 \cdot 3,3 - 0 \cdot 0|}{1,05} = \underline{\underline{3,3}} \text{ см/с}^2;$$

$$\underline{t_1 = 1 \text{ с;}}$$

$$\underline{\underline{a_{\tau_1}}} = \frac{V_{x_1} \cdot a_{x_1} + V_{y_1} \cdot a_{y_1}}{V_1} = \frac{2,7 \cdot 1,6 + 0,9 \cdot (-0,3)}{2,8} = \frac{4,32 - 0,27}{2,8} \approx \underline{\underline{1,45}} \text{ см/с}^2,$$

$$a_n = \frac{|\dot{y}_1 \ddot{x}_1 - \dot{x}_1 \ddot{y}_1|}{V_1} = \frac{|V_{x_1} \cdot a_{y_1} - V_{y_1} \cdot a_{x_1}|}{V_1} = \frac{|2,7 \cdot (-0,3) - 0,9 \cdot 1,6|}{2,8} \approx \underline{\underline{0,68}} \text{ см/с}^2.$$

Так как $V_1 > 0$, $a_{\tau_1} > 0$, движение точки в момент времени $t_1 = 1$ с ускоренное.

б) Графическое решение предполагает выполнение геометрического равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

для соответствующего момента времени (рис. 2.9).

б. Вычисляем радиус кривизны траектории.

Из формулы $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ получаем для каждого времени t :

$$\underline{t_0 = 0}; \quad \underline{\rho_0} = \frac{V_0^2}{a_{n_0}} = \frac{1,05^2}{3,3} \approx \underline{\underline{0,33}} \text{ см};$$

$$\underline{t_1 = 1 \text{ с}}; \quad \underline{\rho_1} = \frac{V_1^2}{a_{n_1}} = \frac{2,8^2}{0,68} \approx \underline{\underline{11,53}} \text{ см}.$$

Ответ:

см				см/с					
x_0	y_0	x_1	y_1	V_{x_0}	V_{y_0}	V_0	V_{x_1}	V_{y_1}	V_1
-1	0	0,5	1	0	1,05	1,05	2,7	0,9	2,8

см/с ²					
a_{x_0}	a_{y_0}	a_0	a_{x_1}	a_{y_1}	a_1
3,3	0	3,3	1,6	-0,3	1,6

см/с ²								см	
a_{τ_0}		a_{n_0}		a_{τ_1}		a_{n_1}		ρ_0	ρ_1
граф.	анал.	граф.	анал.	граф.	анал.	граф.	анал.		
0	0	3,3	3,3	1,45	1,45	0,68	0,68	0,33	11,53

2.2. Вращение твердого тела относительно неподвижной точки в плоскости

Движение точки в плоскости по окружности. Введем радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Совместим начало радиус-вектора с центром окружности O , полярную ось ℓ направим по радиусу (рис. 2.10, *a*). Тогда при движении точки будет меняться только угол между радиус-вектором и осью ℓ , модуль радиус-вектора остается постоянным. Следовательно, описывать движение точки можно одним параметром – углом φ .

Зададим движение точки естественным способом. Ось Mn совпадает с радиусом и проходит через центр окружности, ось $M\tau$ направлена в сторону движения точки и перпендикулярна радиусу.

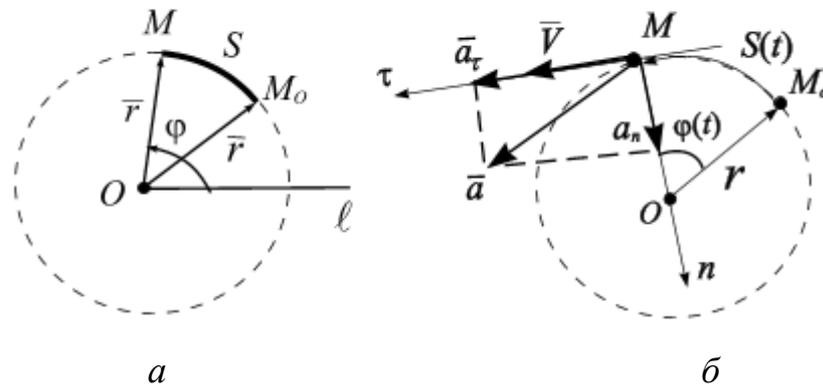


Рис. 2.10

Известно, что длина дуги, радиус окружности и угол φ связаны между собой:

$$S(t) = r \cdot \varphi(t).$$

Введем обозначения:

$|\dot{\varphi}| = \omega_0$ – круговая скорость, $|\ddot{\varphi}| = \varepsilon_0$ – круговое ускорение.

Вычислим скорость и ускорение точки:

$$\begin{aligned} \bar{V}_\tau &= |\dot{S}| \cdot \bar{\tau} = r_0 |\dot{\varphi}| \cdot \bar{\tau} = r_0 \omega_0 \cdot \bar{\tau}; \\ \bar{a}_\tau &= |\ddot{S}| \cdot \bar{\tau} = r_0 |\ddot{\varphi}| \cdot \bar{\tau} = r_0 \varepsilon_0 \cdot \bar{\tau}; \quad \bar{a}_n = \frac{V_\tau^2}{r_0} \cdot \bar{n} = \omega_0^2 r_0 \cdot \bar{n}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Знак производной $\dot{\varphi}$ определяет направление движения точки:

- a* при $\dot{\varphi} > 0$, точка движется против часовой стрелки,
- b* при $\dot{\varphi} < 0$, точка движется по часовой стрелки;
- c* $\ddot{\varphi} > 0, \dot{\varphi} > 0$, или $\ddot{\varphi} < 0, \dot{\varphi} < 0$ – точка движется ускоренно;
- d* $\ddot{\varphi} > 0, \dot{\varphi} < 0$, или $\ddot{\varphi} < 0, \dot{\varphi} > 0$ – точка движется замедленно.

Круговое движение точки

$$V = \omega_0 R, \quad a_\tau = \varepsilon_0 R, \quad a_n = \omega_0^2 R, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R \sqrt{\varepsilon_0^2 + \omega_0^4}$$

Если тело (II) движется, то параметры x_A , y_A и φ меняются со временем, т. е. являются функциями времени: $x_A(t)$, $y_A(t)$, $\varphi(t)$. Поскольку эти параметры независимы, движение тела (II) в плоскости можно разложить на три независимых движения: движение тела вдоль оси Ox – $x_A(t)$ (рис. 2.11, б), движение тела вдоль оси Oy – $y_A(t)$ (рис. 2.11, в), вращение твердого тела вокруг полюса А – $\varphi(t)$ (рис. 2.11, г). Эти движения принято называть простейшими.

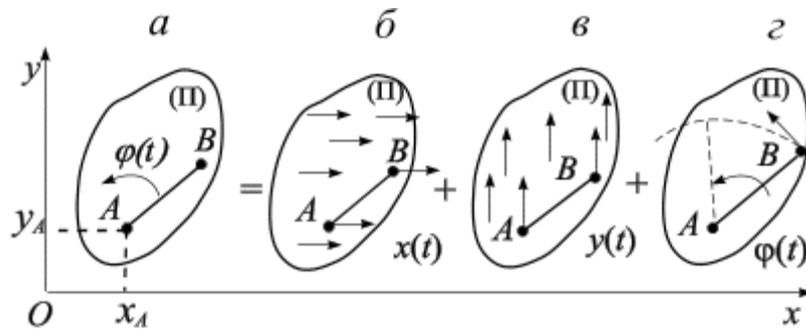


Рис. 2. 11

Уравнения простейших движений твердого тела:

Поступательное движение:

$$x = x_A(t), \quad y = y_A(t).$$

При поступательном движении твердого тела траектории скорости и ускорения всех точек тела одинаковы. В этом случае принимаем тело за материальную точку и исследуем поступательное движение тела, как движение материальной точки.

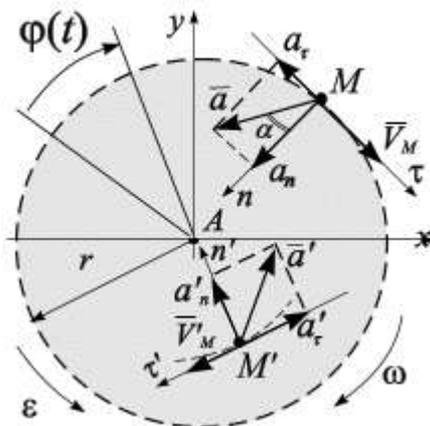


Рис. 2.12

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки А в плоскости определяется углом поворота тела (рис. 2.12):

$$\varphi = \varphi(t).$$

Тогда:

$$|\dot{\phi}| = \omega \text{ — угловая скорость тела,}$$

$$|\ddot{\phi}| = \varepsilon \text{ — угловое ускорение тела.}$$

При вращении твердого тела его точки движутся по окружности в направлении угловой скорости:

$$V_M = \omega \cdot r_M; \quad a_\tau = r_M \varepsilon; \quad a_n = r_M \omega^2.$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r_M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_M^\tau}{a_M^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Пример. Преобразование поступательного движения тела во вращательное движение другого твердого тела осуществляется при помощи диска, на обод которого намотана нерастяжимая нить (нерастяжимый трос, канат и т. д.) к концу которой прикреплен груз (рис. 2.13).

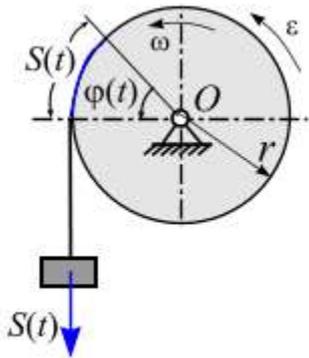


Рис. 2.13

Запишем уравнения связи. Для этого свяжем перемещение точек соприкосновения нити и обода диска, радиус которого равен r .

Пусть тело опустилось на $S(t)$, тогда все точки нерастяжимой нити прошли путь тоже $S(t)$, в результате чего диск повернулся на угол $\varphi(t)$ против часовой стрелки.

$$\text{Имеем } S(t) = \varphi(t) \cdot r. \text{ Тогда } \varphi = \frac{1}{r} S \rightarrow \omega = |\dot{\phi}| = \frac{1}{r} |\dot{S}(t)| = \frac{1}{r} V \rightarrow$$

$$\varepsilon = |\ddot{\phi}| = \frac{1}{r} |\ddot{S}(t)| = \frac{|a_\tau|}{r} = \frac{a}{r}.$$

Преобразование вращения одного твердого тела вокруг неподвижной оси во вращение второго твердого тела вокруг другой неподвижной оси осуществляется посредством зубчатого или фрикционного (за счет сил трения) зацепления двух дисков (рис. 2.14, а, б), или при помощи ременной передачи (рис. 2.14, в, г).

При внешнем зацеплении (рис. 2.14, а) и прямой ременной передаче (рис. 2.14, в) направления вращений обоих дисков совпадают; при внутрен-

нем зацеплении (рис. 2.14, б) и скрещивающейся ременной передаче (рис. 2.14, з) направление вращения дисков противоположно.

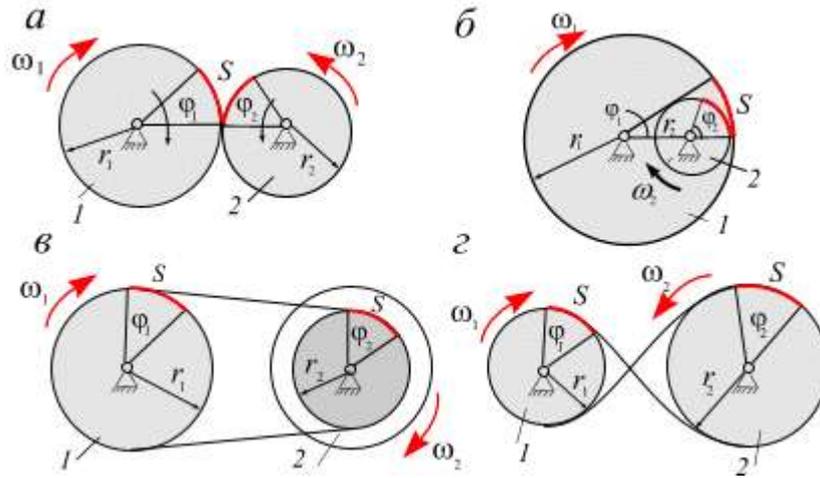


Рис. 2.14

Примем за ведущее звено диск 1, за ведомое – диск 2. Пусть диск 1 за время t повернулся по часовой стрелке на угол φ_1 , тогда диск 2 повернется против часовой стрелки на угол φ_2 . Тогда путь S , пройденный точками на ободе дисков, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, одинаков. На этом основании запишем уравнение связи. Напомним, что длина дуги, угол поворота и радиус связаны соотношением $S = \varphi R$. Тогда для всех типов зацепления имеем

$$\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2. \quad (2.5)$$

Дифференцируя по времени правые и левые части (2.5), получим

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad (2.5 a)$$

здесь ω_1, ω_2 – угловые скорости дисков; r_1, r_2 – радиусы дисков.

Угловые скорости дисков обратно пропорциональны числам зубцов (z_i) или радиусам (r_i), или диаметрам (d_i) дисков.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}, \quad (2.5 б)$$

здесь d_1, d_2 – диаметры дисков; z_1, z_2 – число зубцов каждого диска.

Часто применяется соединение дисков, когда два диска вращаются вокруг одной неподвижной оси. Если при этом они жестко соединены друг с другом, то их угловые скорости равны (на рис. 2.14, v – второй диск).

Содержание контрольных работ для студентов на тему «вычисление кинематических характеристик точек при поступательном и вращательном движениях твердого тела» дано в приложении (контрольная работа 1, задача 2).

Пример 2.3.

Механизм состоит из трех ступенчатых дисков (1–3), находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. На ободах колес расположены точки А, В и С (рис. 2.15).

Исходные данные: $R_1 = 6$ см; $R_2 = 7$ см; $R_3 = 14$ см; $r_1 = 4$ см; $r_2 = 6$ см. Уравнение движения $S_4 = -3t^2 + t$, см (за положительное принято движение рейки вниз).

Для момента времени $t_1 = 2$ с требуется вычислить характеристики движения: $V_B, V_C, a_A; \omega_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$.

Решение

1. Определяем направление движения рейки 4, т. е. всей системы.

$$V_4^\tau = \dot{S}_4 = \frac{d}{dt}(-3t^2 + t) = -6t + 1 \text{ (см/с);}$$

$$\text{для } t_1 = 2 \text{ с } V_4^\tau = -6 \cdot 2 + 1 = -11 \text{ см/с;}$$

$$a_4 = a_4^\tau = \dot{V}_4^\tau = -6 \text{ см/с}^2.$$

Движение рейки 4 (рис. 2.15):

а) поступательное, прямолинейное, т. е. $a_4 = a_4^\tau$, a_4^n отсутствует;

б) равноускоренное, т. к. знаки V_4^τ и a_4^τ одинаковы, и $a_4^\tau = const$;

в) направлено вверх, т. к. знаки V_4^τ и a_4^τ отрицательны.

Движение остальных тел механизма определяется направлением движения рейки 4 (рис. 2.15).

2. Составляем уравнения связей для всех тел системы, используя точки зацепления между телами и условие, что ремень и нить считаются нерастяжимыми. При используемом в задаче соединении тел знаки параметров сохраняются.

$$S_4 = \varphi_3 \cdot R_3 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{S_4}{R_3} = \frac{-3t^2 + t}{R_3};$$

$$\varphi_3 \cdot R_3 = \varphi_1 \cdot r_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi_3 \cdot R_3}{r_1} = \frac{S_4}{R_3} \cdot \frac{R_3}{r_1} = \frac{S_4}{r_1} = \frac{-3t^2 + t}{r_1};$$

$$\varphi_1 \cdot R_1 = \varphi_2 \cdot R_2 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\varphi_1 \cdot R_1}{R_2} = \frac{S_4}{r_1} \cdot \frac{R_1}{R_2} = S_4 \cdot \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2} = (-3t^2 + t) \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2};$$

$$|S_5| = |\varphi_2 \cdot r_2| = \frac{|S_4|}{r_1} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot r_2 = |S_4| \cdot \frac{R_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot R_2} = (|-3t^2 + t|) \frac{R_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot R_2}.$$

Для определения скоростей тел дифференцируем составленные законы движения по времени:

$$V_4^\tau = \dot{S}_4 = \dot{\varphi}_3 \cdot R_3 = \omega_3 \cdot R_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{V_4^\tau}{R_3} = \frac{-6t + 1}{R_3};$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{S}_4}{r_1} = \frac{V_4^\tau}{r_1}; \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \dot{S}_4 \cdot \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2} = V_4^\tau \cdot \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2} = (-6t + 1) \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2};$$

$$|V_5| = |\dot{S}_5| = |\dot{S}_4| \cdot \frac{R_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot R_2} = V_4 \cdot \frac{R_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot R_2} = (|-6t + 1|) \frac{R_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot R_2}.$$

3. Рассчитываем требуемые характеристики движения точек и тел.

Так как точка С и точка зацепления рейки и колеса 3 находятся на одном радиусе этого колеса, то

$$\underline{\underline{V_C}} = V_4 = \underline{\underline{11}} \text{ см/с (рис. 2.15).}$$

Угловое ускорение колеса 3 получаем, дифференцируя по времени выражение угловой скорости

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{\dot{V}_4^\tau}{R_3} = \frac{a_4^\tau}{R_3}, \text{ т.е.}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_3}} = \frac{-6}{14} = \underline{\underline{-0,43}} \text{ с}^{-2} \text{ (рис. 2.15);}$$

Точка В находится на внешнем ободе колеса 1, тогда

$$\underline{\underline{V_B}} = |\omega_1| \cdot R_1 = 2,75 \cdot 6 = \underline{\underline{16,5}} \text{ см/с (рис. 2.15),}$$

где $\omega_1 = \frac{V_4^\tau}{r_1} = \frac{-11}{4} = -2,75 \text{ с}^{-1}$.

Угловое ускорение колеса 1 получаем, дифференцируя по времени выражение угловой скорости

$$\underline{\underline{\varepsilon_1}} = \dot{\omega}_1 = \frac{\dot{V}_4^\tau}{r_1} = \frac{a_4^\tau}{r_1} = \frac{-6}{4} = \underline{\underline{-1,5}} \text{ с}^{-2} \text{ (рис. 2.15).}$$

Угловая скорость колеса 2:

$$\underline{\underline{\omega_2}} = V_4^\tau \cdot \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2} = -11 \cdot \frac{6}{4 \cdot 7} = -\frac{66}{28} = \underline{\underline{-2,36}} \text{ с}^{-1} \text{ (рис. 2.15).}$$

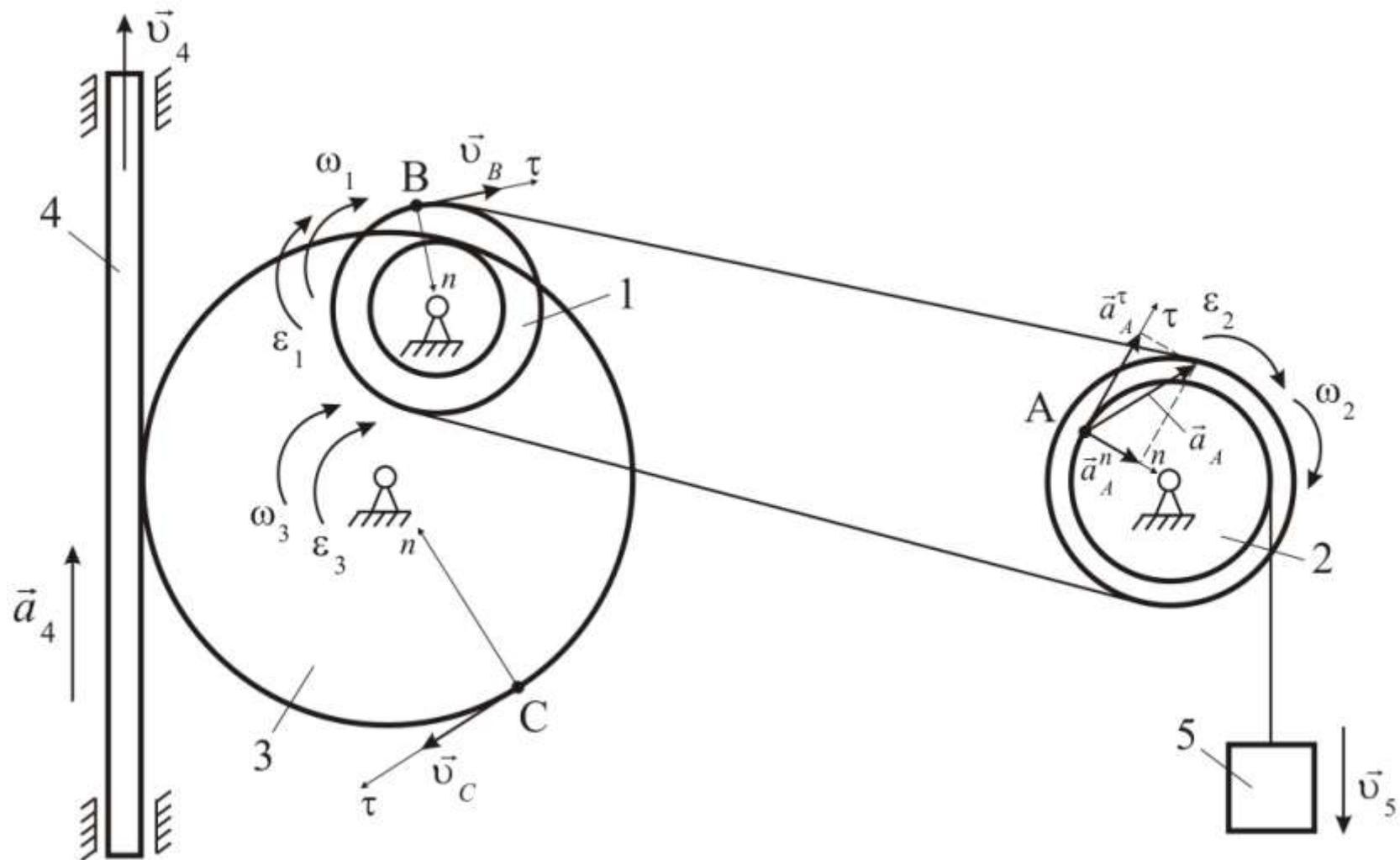


Рис. 2.15

Для расчета ускорения точки А, расположенной на внутреннем ободе колеса 2, необходимо рассчитать две составляющие этого ускорения при криволинейном движении этой точки:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n, \quad \text{откуда} \quad a_A = \sqrt{a_A^{\tau 2} + a_A^{n 2}},$$

$$\begin{aligned} \text{где } \left| \underline{a}_A^\tau \right| &= |\varepsilon_2| \cdot r_2 = |\dot{\omega}_2| \cdot r_2 = \frac{d}{dt} \left(\left| V_4^\tau \right| \cdot \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2} \right) \cdot r_2 = \left| a_4^\tau \right| \cdot \frac{R_1}{r_1 \cdot R_2} \cdot r_2 = \\ &= 6 \cdot \frac{6}{4 \cdot 7} \cdot 6 = \frac{216}{28} = \underline{\underline{7,7}} \text{ (см/с}^2\text{)}; \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{a}}_A^n = \omega_A^2 \cdot r_A = (2,36)^2 \cdot 6 = \underline{\underline{33,42}} \text{ см/с}^2;$$

$$\underline{\underline{a}}_A = \sqrt{a_A^{\tau 2} + a_A^{n 2}} = \sqrt{(7,7)^2 + (33,42)^2} = \sqrt{1176,1864} = \underline{\underline{34,3}} \text{ см/с}^2 \text{ (рис. 2.15).}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } V_B &= 16,5 \text{ см/с}; & a_A &= 34,3 \text{ см/с}^2; \\ V_C &= 11 \text{ см/с}; & \varepsilon_1 &= -1,5 \text{ с}^{-2}; \\ \omega_2 &= -2,36 \text{ с}^{-1}; & \varepsilon_3 &= -0,43 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

2.3. Сложное движение точки

Движение точки по отношению к двум или нескольким системам отсчета называется *сложным*. Движение точки М по отношению к подвижной системе отсчета называется *относительным* (рис. 2.16). Используются понятия: *относительная траектория*, *относительная скорость* (\vec{V}_r) и *относительное ускорение* (\vec{a}_r).

Движение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной является для точки *переносным*. Скорость и ускорение точки под-

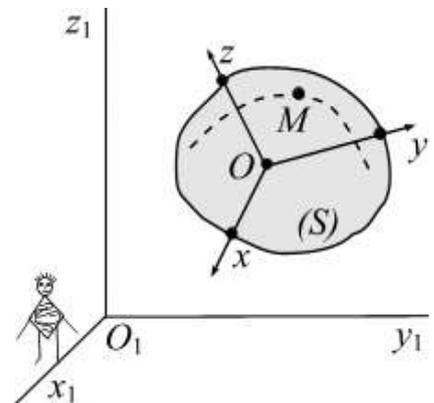


Рис. 2.16

вижной системы отсчета, в которой в данный момент времени находится движущаяся точка M , называются *переносной скоростью* (\bar{V}_e) и *переносным ускорением* (\bar{a}_e).

Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета называется *сложным* или *абсолютным*. Используются понятия: *абсолютная траектория*, *абсолютная скорость* (\bar{V}_M) и *абсолютное ускорение* (\bar{a}_M).

Теорема. *Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее относительной и переносной скоростей:*

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{V}_r + \bar{V}_e,$$

здесь: \bar{V}_r – скорость относительного движения;

\bar{V}_e – скорость переносного движения.

Теорема. *Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трёх ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса (или поворотного):*

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k,$$

здесь: \bar{a}_r – ускорение относительного движения;

\bar{a}_e – переносное ускорение;

\bar{a}_k – ускорение Кориолиса.

Ускорение Кориолиса (\bar{a}_k) равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения ($\bar{\omega}_e$) на относительную скорость точки (\bar{V}_r):

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$$

Модуль ускорения Кориолиса равен

$$a_k = \omega_e \cdot V_r \sin \alpha.$$

Здесь: угол α , угол между вектором относительной скорости \bar{V}_r и вектором угловой скорости переносного вращения $\bar{\omega}_e$.

Направление ускорения Кориолиса определяется по *правилу Жуковского*.

Правило Жуковского (рис. 2.17):

1. Следует провести плоскость перпендикулярно оси переносного вращения ($\Pi \perp \bar{\omega}_e$).
2. Спроецировать вектор относительной скорости на эту плоскость: $\bar{V}_r \rightarrow V_r^* \equiv V_r \sin \alpha$.
3. Повернуть эту проекцию V_r^* в этой плоскости на 90° по направлению дуговой стрелки переносного вращения ω_e .

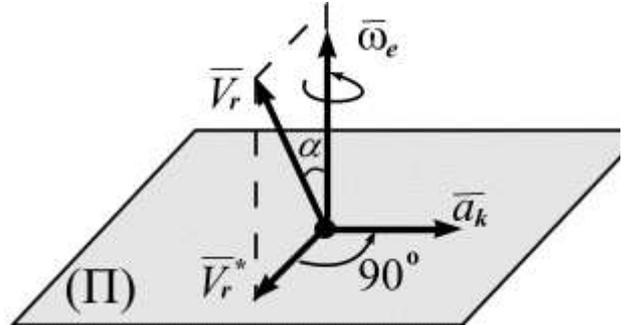


Рис. 2.17

Содержание контрольных работ для студентов на тему «сложное движение точки» дано в приложении (контрольная работа 1, задача 3).

Пример 2.4. Стержень вращается в плоскости Oxy вокруг неподвижного центра O в плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Точка M скользит вдоль стержня со скоростью $2 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. Вычис-

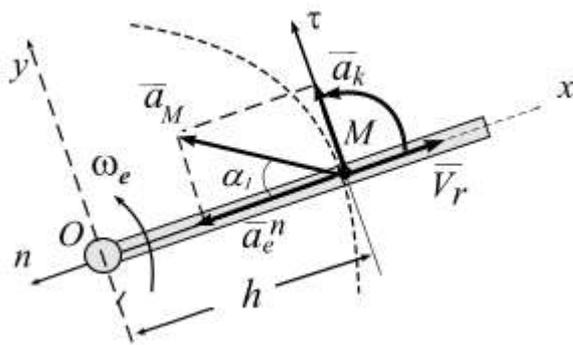


Рис. 2.18

лит абсолютное ускорение точки M для момента времени 4 с (рис. 2.18).

Решение. Стержень вращается в плоскости Oxy вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью $\omega_e = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Точка M скользит вдоль

стержня со скоростью $V_r = 2 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ (рис. 2.18). Абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k,$$

здесь: вектор относительного ускорения $\bar{a}_r = \dot{\bar{V}}_r = 0$, т. к. $\dot{\bar{V}}_r = \text{const}$.

Вектор переносного ускорения

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n,$$

где $a_e^n = \omega_e^2 h = (0,5)^2 \cdot 8 = 2 \frac{\text{см}}{2}$, $a_e^\tau = \varepsilon_e h = 0$,

здесь $h = OM = V_r \cdot t = 2 \cdot 4 = 8$ см.

вектор \bar{a}_e^n направлен по оси Mn .

Ускорение Кориолиса $a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \sin \alpha = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \sin(90^\circ) = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r$,
при $t = 4$ с

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r = 2 \cdot 0,5 \cdot 2 = 2 \frac{\text{см}}{2}.$$

Определим направление вектора \bar{a}_k , используя правило Жуковского. Угол между вектором относительной скорости \bar{V}_r и $\bar{\omega}_e$ равен 90° (вектор $\bar{\omega}_e \perp Oxy$), тогда вектор \bar{V}_r разворачиваем на 90° по направлению дуговой стрелки ω_e (рис. 2.18).

Вычислим абсолютное ускорение точки M :

$$a_M = \sqrt{(a_e^n)^2 + a_k^2} = \sqrt{(\omega_e^2 h)^2 + (2 \cdot \omega_e V_r)^2}.$$

Тангенс угла (α_1) между \bar{a}_M и осью Mn равен:

$$\text{tg}(\alpha_1) = \frac{a_k}{a_e^n} = \frac{2\omega_e V_r}{\omega_e^2 h} = \frac{2 \cdot V_r}{\omega_e \cdot V_r \cdot t} = \frac{2}{\omega_e \cdot t}.$$

В момент времени $t = 4$ с,

$$a_M = \sqrt{(a_e^n)^2 + a_k^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2,83 \frac{\text{см}}{2},$$

$$\alpha_1 = \text{arctg}\left(\frac{2}{\omega_e \cdot t}\right) = \text{arctg}\left(\frac{2}{0,5 \cdot 4}\right) = \text{arctg}(1) = 45^\circ.$$

Ответ: $a_M = 2,83$ см/с².

Пример 2.5. Пластина B вращается вокруг неподвижной оси AC согласно уравнению $\varphi_e = -4t + 5t^3$ (рис. 2.19). На пластине по желобу движется точка согласно уравнению

$$OM \equiv S_r = \frac{\pi R \sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \text{ см.}$$

Вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с, если радиус желоба $R = 30$ см.

Решение. Будем считать, что в момент времени $t = 1$ с угол поворота φ_e имеет такое значение, при котором тело B располагается в плоскости $O'uz$ (рис. 2.20).

Точка M совершает сложное движение, состоящее из относительного (движение точки по желобу) и переносного (вращение точки вместе с пластиной вокруг оси AC) движений.

Вычислим абсолютную скорость точки M :

$$\bar{V}_M = \bar{V}_r + \bar{V}_e .$$

Относительная скорость \bar{V}_r .

Найдем положение точки M на пластине B через 1 с. Для этого вычислим значение дуговой координаты $S_r = \overset{\sim}{OM}$ при $t = 1$ с:

$$\overset{\sim}{OM} = \frac{\pi R \sqrt{2}}{4} \left| \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \right|_{1\text{с}} = \frac{\pi R \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R}{4} \text{ см.}$$

Если обозначить угол, на который опирается дуга OM , через α (рис. 2.20), то $\alpha = \frac{S_r}{R} = \frac{\pi R}{4R} = \frac{\pi}{4}$.

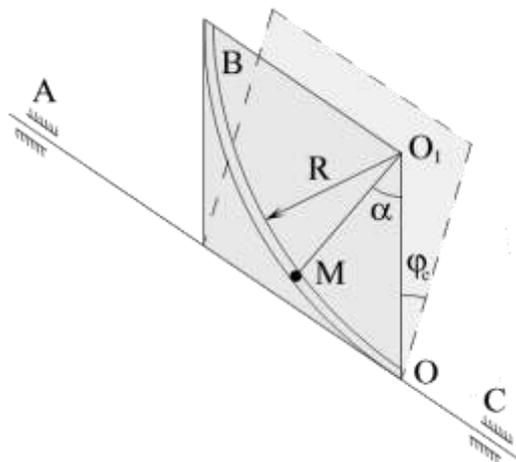


Рис. 2.19

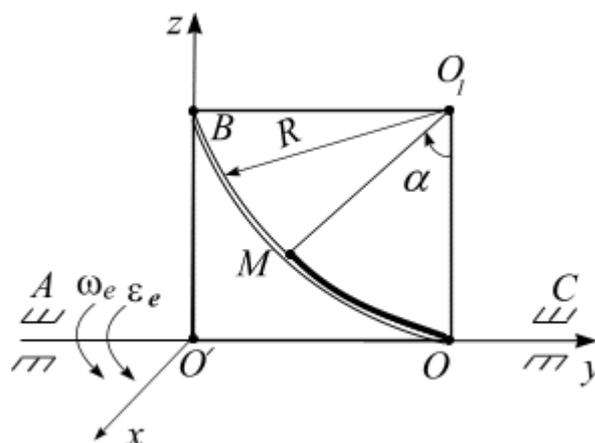


Рис. 2.20

Переносное движение ускоренное, т. к. $\dot{\phi} > 0$, $\ddot{\phi} > 0$, дуговые стрелки ω_e и ε_e направлены в одну сторону (рис. 2.21, б). Приведем оси $M\tau'$ и Mn' к точке M .

Вычислим радиус кривизны траектории при переносном движении точки M в момент времени $t = 1\text{с}$ ($MK = R - M_1O$):

$$MK = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha) = 30(1 - \cos(\frac{\pi}{4})) = 30(1 - 0,707) = 8,79 \text{ см.}$$

Переносная скорость V_e

$$V_e = \omega_e \cdot KM = 11 \cdot 8,79 = 96,7 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Вектор переносной скорости \bar{V}_e направлен по касательной к траектории в точке M – ось $M\tau'$ (рис. 2.21, б). Направление оси $M\tau'$ согласуется с направлением дуговой стрелки ω_e .

Так как в данном случае векторы \bar{V}_r , \bar{V}_e взаимно перпендикулярны (вектор скорости \bar{V}_r расположен в плоскости $O'yz$, вектор скорости \bar{V}_e направлен по оси $x \equiv M\tau'$, т.е. $\perp O'yz$), то модуль абсолютной скорости точки M :

$$V_M = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{18,5^2 + 96,7^2} \approx \sqrt{342,3 + 9350} = 98,45 \text{ см/с.}$$

Вычислим абсолютное ускорение точки M . Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и Кориолисова ускорений

$$\bar{a}_M = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k.$$

Относительное ускорение \bar{a}_r . Относительное движение точки задано естественным способом – точка M движется по окружности радиусом MO_1 в соприкасающейся плоскости относительного движения $O'yz$. Приведем к точке M оси естественного трехгранника $M\tau n$ (рис 2.22, а). Ось $M\tau$ совпадает с направлением \bar{V}_r , ось Mn перпендикулярна оси $M\tau$ и направлена вовнутрь вогнутости траектории по радиусу O_1M .

Относительное ускорение \bar{a}_r равно

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n.$$

Здесь, при $t = 1$ с:

$$a_r^\tau = |\ddot{S}_r| = |\dot{V}_r| = \left| -\frac{\pi^3 R \sqrt{2}}{16 \cdot 4} \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right) \right|_{1c} = \left| -\frac{\pi^3 R \sqrt{2}}{4^3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = |-14,5| \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_r^n = \frac{\dot{S}_r^2}{R} = \frac{V_r^2}{R} = \frac{(18,8)^2}{30} = 11,4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Точка M движется с замедлением, поскольку векторы $\dot{S} > 0$, $\ddot{S} < 0$, вектор \bar{V}_r и вектор \bar{a}_r^τ имеют разное направление по оси $M\tau$. Векторы \bar{a}_r^τ и \bar{a}_r^n направлены по осям $M\tau$ и Mn соответственно и лежат в плоскости $O'yz$.

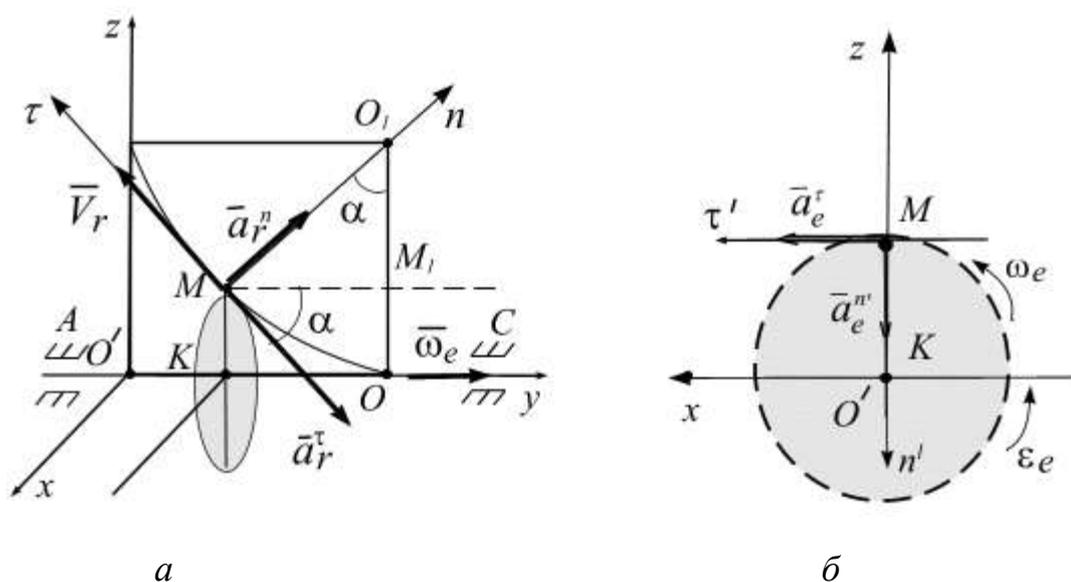


Рис. 2.22

Переносное ускорение \bar{a}_e . Движение точки в ее переносном движении криволинейное. Точка движется по окружности радиусом MK в соприкасающейся плоскости переносного движения, параллельной плоскости $O'xz$. Приведем к точке M оси естественного трехгранника $M\tau'n'$ (рис 2.22, б). Ось

Итак,

$$V_r^* = V_r \sin \beta = V_r \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) = V_r \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = 18,5 \cdot 0,707 = 13,07 \frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r^* = 2 \cdot 11 \cdot 13,07 = 287,76 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Направление вектора \bar{a}_k по правилу Журавского: поворачиваем \bar{V}_r^* на 90° по направлению дуговой стрелки $\omega_e \rightarrow$ вектор \bar{a}_k направлен параллельно оси x (рис. 2.23, б).

Для вычисления модуля абсолютного ускорения используем способ проекций. Спроецируем все составляющие абсолютного ускорения на оси $O'xyz$. Имеем (рис 2.22 и рис. 2.23, б):

$$a_x = \sum a_{xi} = |-a_e^\tau - a_k| = |-263 - 287,76| = |-551,5| \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \sum a_{yi} = |a_r^\tau \cos \alpha + a_r^n \sin \alpha| = 14,5 \cdot 0,707 + 11,4 \cdot 0,707 = 18,3 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = \sum a_{zi} = |-a_e^{n'} - a_r^\tau \sin \alpha + a_r^n \cos \alpha| = |-1063,6 - 14,5 \cdot 0,707 + 11,4 \cdot 0,707| =$$

$$= |-1065,8| \text{ см/с}^2.$$

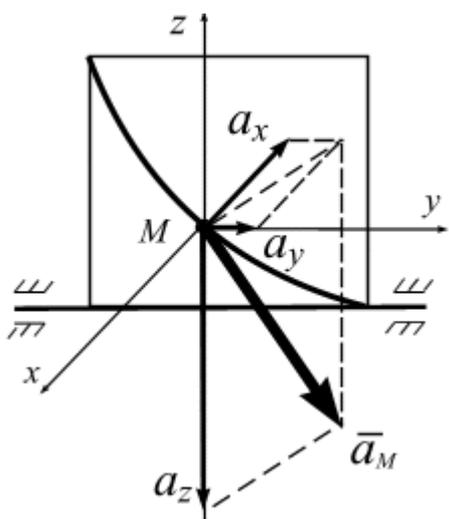


Рис. 2.24

Модуль абсолютного ускорения (рис. 2.24):

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} =$$

$$= \sqrt{(551,5)^2 + (18,3)^2 + (1065,8)^2} =$$

$$= 1200,2 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора \bar{a}_M определим геометрически. Совместим с точкой M декартову систему координат $Mxyz$ (рис. 2.24).

Ответ: $V_M = 98,45 \text{ см/с};$
 $a_M = 1200,2 \text{ см/с}^2.$

2.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельное движение тела можно рассматривать как сумму двух простых движений: поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса. Уравнения плоского (плоскопараллельного) движения твердого тела:

$$x_A = x(t), \quad y_A = y(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Поступательная часть движения $x_A = x(t)$, $y_A = y(t)$ зависит от выбора полюса A , а вращательная часть движения от выбора полюса не зависит, т. е. ω и ε – общие кинематические характеристики движения всего твердого тела в целом.

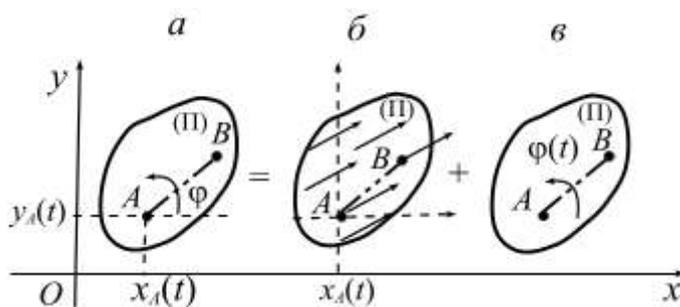


Рис. 2.25

Теорема. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в её вращении вместе с фигурой вокруг полюса: если A – полюс, то скорость любой точки M плоской фигуры по теореме

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{M(A)},$$

здесь $\vec{V}_{M(A)}$ – скорость точки M в её вращении вместе с фигурой вокруг полюса A ($\vec{V}_{M(A)} \perp AM$ и $\vec{V}_{M(A)} = AM \cdot \omega$) (рис. 2.26).

Следствия теоремы:

- проекции скоростей точек тела на прямую, проходящую через эти точки, равны;
- концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка (рис. 2.27).

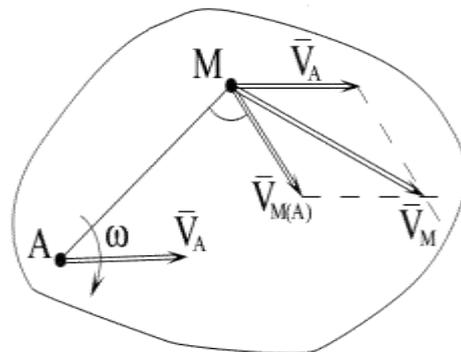


Рис. 2.26

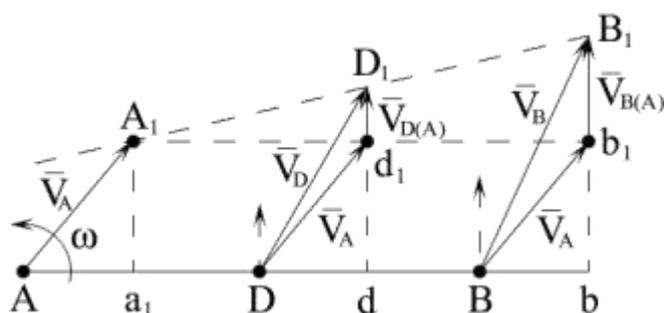


Рис. 2.27

Мгновенный центр скоростей (МЦС)

Теорема. В каждый момент времени при плоском движении тела, если $\omega \neq 0$, имеется единственная точка в плоскости его движения, скорость которой равна нулю. Эту точку называют **мгновенным центром скоростей (МЦС)**.

Если эту точку выбрать за полюс, то по теореме при определении скорости точки фигуры поступательная часть движения будет равна нулю, а остается только вращательная часть движения. Таким образом, *скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг МЦС*.

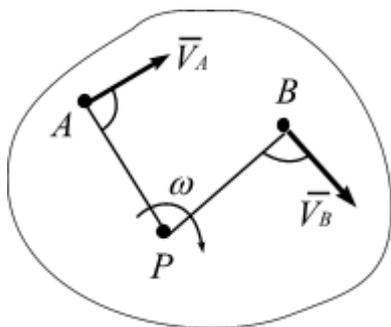


Рис. 2.28

Если положение МЦС известно, то, приняв МЦС за новый полюс ($V_P = 0$) для любой другой точки тела, например точки A (рис. 2.28), скорость можно вычислить следующим образом:

$$\vec{V}_A \equiv \vec{V}_{A(P)}, \quad V_A = \omega \cdot AP, \quad \vec{V}_A \perp \overline{AP},$$

здесь AP – расстояние от точки A до МЦС, т. е. до точки P .

Скорость точки B вычислим аналогично:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{B(P)}, \quad V_B = \omega \cdot BP, \quad (\vec{V}_B \perp \overline{BP}).$$

Из полученных выражений для V_A и V_B имеем

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}, \quad \text{или} \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (2.6)$$

Следовательно, если положение МЦС известно, то скорости точек тела вычисляют так же, как и в случае вращения тела в плоскости вокруг точки P с угловой скоростью ω (рис. 2.28).

Пример 2.6. Колесо радиусом R катится без скольжения по линейному рельсу. Центр C колеса движется согласно уравнению $x_C = V_C \cdot t$. Вычислить скорости точек обода колеса P, M, K, N , расположенных, как показано на рис. 2.29.

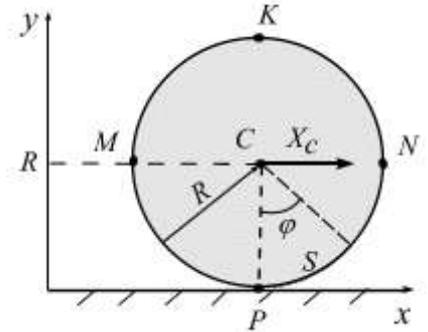


Рис. 2.29

Решение. Получим уравнения движения колеса. Имеем (рис. 2.29):

$$x_C(t) = V_C \cdot t, \quad y_C(t) = R, \quad \varphi(t) = \frac{x_C(t)}{R}.$$

За полюс выберем точку C . Вычислим скорость полюса и угловую скорость вращения колеса ω вокруг полюса. Имеем:

$$\dot{x}_C(t) = V_C, \quad \dot{y}_C(t) = 0,$$

$$\varphi = \frac{x_C}{R} = \frac{x_C}{R}; \quad \omega = |\dot{\varphi}(t)| = \frac{\dot{x}_C(t)}{R} = \frac{V_C}{R}.$$

Применим последовательно к точкам P, K, N, M , лежащим на ободе колеса, теорему о скоростях при плоском движении:

$$\bar{V}_{(\cdot)} = \bar{V}_C + \bar{V}_{(\cdot)(C)}.$$

Отметим, что скорости по модулю на ободе колеса при его вращении вокруг условно неподвижного полюса равны между собой (рис. 2.30):

$$\bar{V}_{(\cdot)(C)} \equiv V_{P(C)} = V_{M(C)} = V_{K(C)} = V_{N(C)} = \omega \cdot R = \frac{V_C}{R} \cdot R = V_C.$$

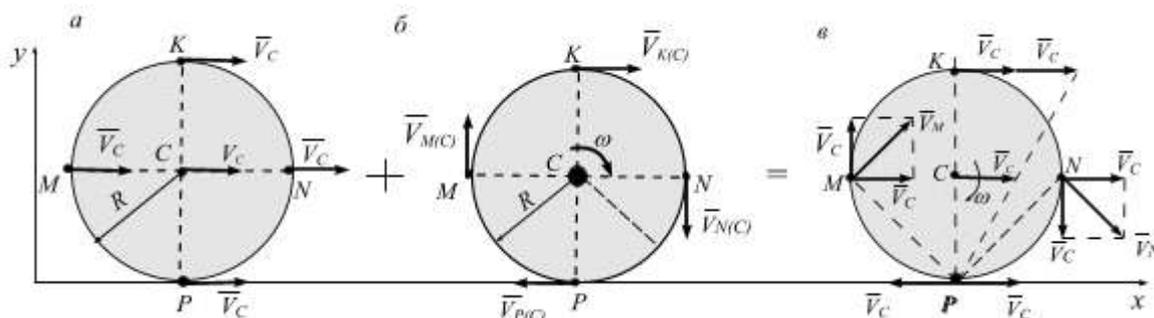


Рис. 2.30

Направление слагаемых скоростей в исследуемых точках показаны на рис. 2.31.

1. Точка P : $\vec{V}_P = \vec{V}_C + \vec{V}_{P(C)}$

здесь $\vec{V}_{P(C)} \parallel \vec{V}_C$, тогда $V_P = V_C - V_{P(C)} = V_C - V_C = 0$.

2. Точка M : $\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{M(C)}$,

здесь $\vec{V}_{M(C)} \perp \vec{V}_C$, тогда $V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{M(C)}^2} = V_C \sqrt{2}$.

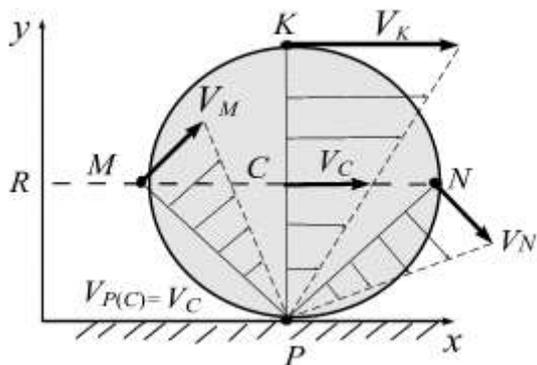


Рис. 2.31

3. Точка K : $\vec{V}_K = \vec{V}_C + \vec{V}_{K(C)}$,

здесь $\vec{V}_{K(C)} \parallel \vec{V}_C$, тогда

$$V_K = V_C + V_C = 2V_C.$$

4. Точка N : $\vec{V}_N = \vec{V}_C + \vec{V}_{N(C)}$,

здесь $\vec{V}_{N(C)} \perp \vec{V}_C$, тогда

$$V_N = \sqrt{V_C^2 + V_{N(C)}^2} = V_C \sqrt{2}.$$

Отметим, что перпендикуляры, проведенные к векторам скоростей соответственно в точках K, N, M (рис. 2.31), пересекутся в точке P , скорость которой равна нулю.

Ответ: $V_P = 0, V_M = V_N = V_C \sqrt{2}, V_K = 2 V_C$.

Частные случаи вычисления МЦС

Рассмотрим частные случаи вычисления точки МЦС.

1. Если плоское движение осуществляется путем качения без скольжения однородного цилиндрического тела по поверхности другого тела, причем второе тело неподвижно, то точка касания P имеет в данный мо-

мент времени скорость, равную нулю, следовательно, является МЦС (рис. 2.32, а), т. е. тело *мгновенно вращается относительно точки касания P*. Пример – качение колеса по рельсу.

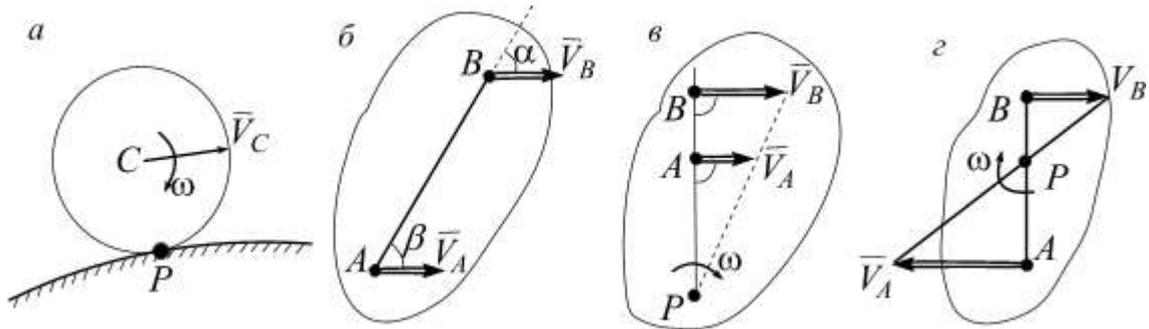


Рис. 2.32

2. Если скорости точек A и B тела параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна к \vec{V}_A и \vec{V}_B (рис. 2.32, б), то восстанавливая перпендикуляры к скоростям, выясним, что точка МЦС находится в бесконечности, тогда $\omega = \frac{V_A}{\infty} = 0$. Из общей теоремы кинематики имеем $V_A \cos \beta = V_B \cos \alpha$ ($\alpha = \beta$), тогда $V_B = V_A$. Следовательно, скорости всех точек тела в данный момент равны между собой по модулю и по направлению, т. е. тело движется *мгновенно поступательно*. При мгновенно поступательном движении угловая скорость тела равна нулю, угловое ускорение не всегда равно нулю.

3. Если скорости точек A и B тела параллельны друг другу и при этом $\overline{AB} \perp \vec{V}_A$, то положение точки МЦС определяется построениями, показанными на рис. 2.32, в, г; тело имеет *мгновенно вращательное движение вокруг* точки МЦС (точка P). Известно, что модули скоростей точек тела пропорциональны их расстояниям от точки МЦС, т. е.

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP}{PA}.$$

4. Если на перпендикуляре к вектору скорости есть точка, скорость в которой равна нулю, то эта точка будет точкой МЦС.

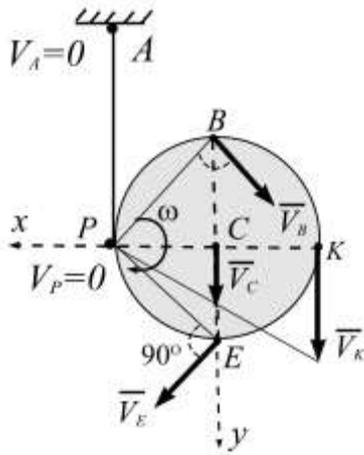


Рис. 2.33

На рис. 2.33 приведен пример маятника Максвелла – на диск радиусом R намотана нерастяжимая нить, конец которой закреплен в точке A . Свяжем декартову систему координат S_{xus} центром диска. Скорость в точке C параллельна оси S_y . На оси S_x скорость в точке P равна нулю ($V_P = 0$). Точка P – МЦС. Модули скоростей точек диска связаны соотношением

$$\omega = \frac{V_C}{R} = \frac{V_B}{R\sqrt{2}} = \frac{V_K}{2R} = \frac{V_E}{R\sqrt{2}}.$$

Теорема. Ускорение какой-либо точки тела при его плоском движении равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения этой точки при вращательном движении тела вокруг полюса.

Если A – полюс, то ускорение любой точки M плоской фигуры по теореме

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{M(A)} = \vec{a}_A + \vec{a}_{M(A)}^n + \vec{a}_{M(A)}^\tau.$$

здесь $\vec{a}_{M(A)}$ – ускорение точки M в её вращении вместе с фигурой вокруг полюса A (рис. 2.34, а, б), которое, в свою очередь, складывается из касательного и нормального ускорений.

Касательная составляющая ускорения (рис. 2.34, а, в) направлена $\perp AM$ в сторону дуговой стрелки ε и равна $a_{M(A)}^\tau = \varepsilon \cdot AM$

Нормальная составляющая ускорения (рис. 2.34, а, в) направлена по нормали, т. е. по AM к полюсу A , и равна $a_{M(A)}^n = \omega^2 \cdot AM$.

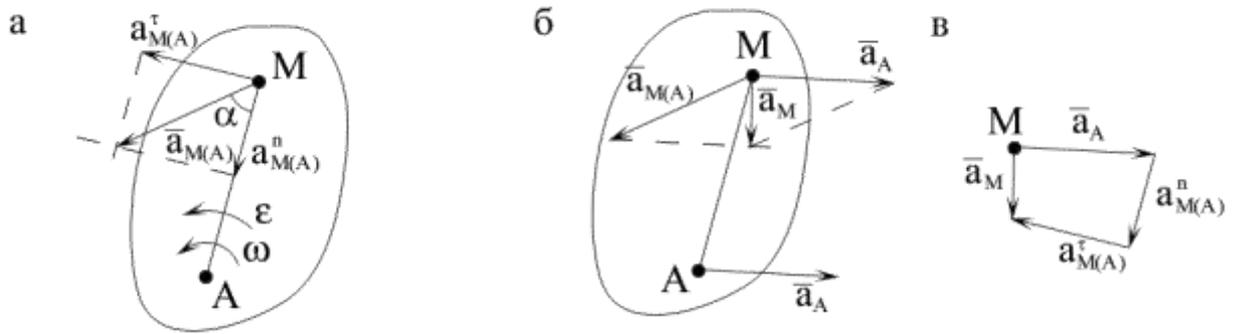


Рис. 2.34

Содержание контрольных работ для студентов на тему «плоское движение твердого тела» дано в приложении (контрольная работа 2, задачи 1 и 2).

Пример 2.7.

Исходные данные: кривошип OA длиной 60 см вращается ускоренно относительно оси O и приводит в движение ролик 1 радиусом $r_1 = 20$ см, который катится без скольжения по неподвижному колесу 2 (рис. 2.35). Параметры вращения кривошипа в данный момент времени $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 1 \text{ с}^{-2}$.

Требуется: определить угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 ролика, вычислить скорость и ускорение точки B , находящейся на ролике на расстоянии 10 см от точки A .

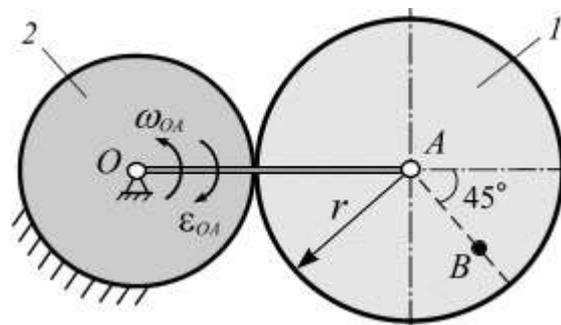


Рис. 2.35

Решение. Кривошип OA совершает вращательное движение относительно оси, проходящей через неподвижный центр O . Скорость и ускорение точки A кривошипа вычисляют по формулам:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 60 = 120 \text{ см/с};$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n.$$

Подвижный ролик движется плоскопараллельно. Вычислим ω_1 и ε_1 подвижного ролика. Плоское движение ролика можно привести к мгновенно-вращательному движению относительно мгновенного центра скоростей (МЦС), этим центром является точка касания P (рис. 2.36).

Запишем уравнение связи между движениями кривошипа и ролика. Точка A одновременно принадлежит кривошипу OA и ролику I . Следовательно, перемещение точки A :

$$S_A = \varphi_{OA} \cdot OA = \varphi_1 \cdot AP, \text{ т. е. } \varphi_1 = \varphi_{OA} \cdot \frac{OA}{AP}.$$

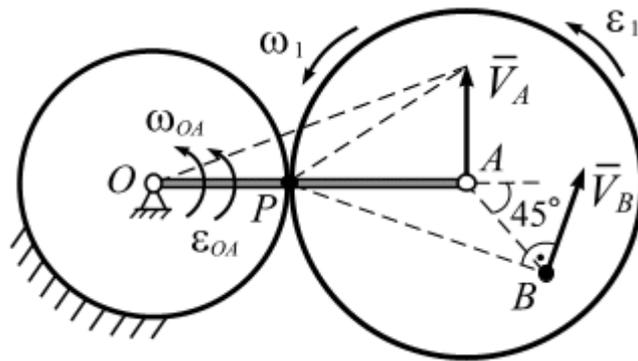


Рис. 2.36

Угловая скорость и угловое ускорение ролика I тогда вычисляются:

$$\underline{\underline{\omega_1}} = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_{OA} \cdot \frac{OA}{AP} = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{AP} = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{r_1} = \frac{2 \cdot 60}{20} = \underline{\underline{6}} \text{ с}^{-1};$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_1}} = \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_{OA} \cdot \frac{OA}{AP} = \frac{\varepsilon_{OA} \cdot OA}{AP} = \frac{\varepsilon_{OA} \cdot OA}{r_1} = \frac{1 \cdot 60}{20} = \underline{\underline{3}} \text{ с}^{-2}.$$

Угол вращения ролика относительно точки P (точка МЦС) совпадает с углом вращения кривошипа (рис. 2.36). Направления вращения ω_1 и ε_1 ролика I совпадают, отмечаем их дуговыми стрелками; следовательно, движение ролика I является ускоренным, как и кривошипа OA .

Скорость точки B .

Точка B находится на ролике I , следовательно, её скорость определяется как скорость точки, вращающейся вокруг МЦС, т. е. точки P :

$$V_B = \omega_1 \cdot BP.$$

Из геометрии задачи определим по теореме косинусов расстояние BP :

$$\begin{aligned} BP &= \sqrt{(AP)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot (AP) \cdot (AB) \cdot \cos 135^\circ} = \\ &= \sqrt{20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot (-0,707)} = \sqrt{782,8} = 27,98 \approx 28 \text{ см.} \end{aligned}$$

Тогда скорость точки B :

$$\underline{\underline{V_B}} = \omega_1 \cdot BP = 6 \cdot 28 = \underline{\underline{168}} \text{ см/с.}$$

Вектор $\underline{\underline{V_B}}$ перпендикулярен отрезку BP и направлен в сторону вращения ω_1 ролика (рис. 2.36).

1. *Ускорение точки B .*

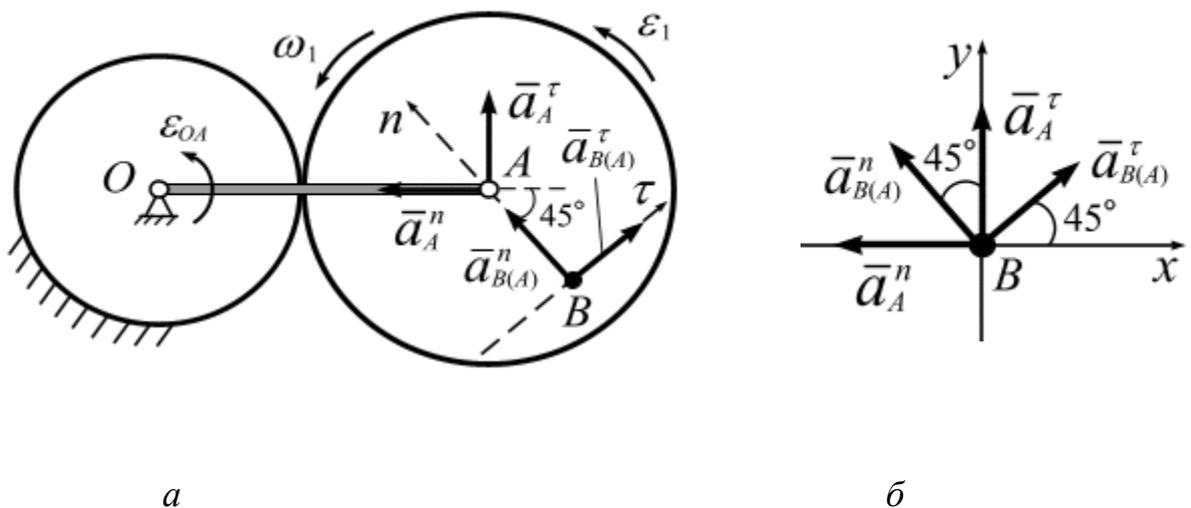


Рис. 2.37

Ускорение точки B складывается из ускорения полюса и ускорения точки B при её вращении вместе с роликом вокруг этого полюса. За полюс примем точку A , т. к. её ускорение известно.

Тогда ускорение точки B запишется (рис. 2.37, a)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B(A)} = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{B(A)}^n + \bar{a}_{B(A)}^\tau.$$

Здесь:

$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 4 \cdot 60 = 240 \text{ см/с}^2$ – нормальная составляющая ускорения полюса, направлена от точки A к центру O ;

$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 60 = 60 \text{ см/с}^2$ – касательная составляющая ускорения полюса, направлена перпендикулярно \bar{a}_A^n в сторону углового ускорения кривошипа OA – ε_{OA} ;

$a_{B(A)}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AB = 3 \cdot 10 = 30 \text{ см/с}^2$ – ускорения точки B при её вращении относительно полюса A ; вектор $\bar{a}_{B(A)}^\tau$ перпендикулярен AB и направлен в сторону дуговой стрелки ε_1 ;

$a_{B(A)}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 6^2 \cdot 10 = 360 \text{ см/с}^2$, вектор $\bar{a}_{B(A)}^n$ направлен по отрезку AB от точки B к точке A .

Выражение для расчета ускорения точки B записано в векторной форме. Для аналитических вычислений необходимо спроецировать это векторное равенство на две оси координат, тогда теорема примет вид

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{B(A)}^n + \bar{a}_{B(A)}^\tau = \bar{a}_{Bx} + \bar{a}_{By}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= \sum a_{ix} = -a_A^n + a_{B(A)}^\tau \cdot \cos 45^\circ - a_{B(A)}^n \cdot \sin 45^\circ = -240 + 30 \cdot 0,707 - 360 \cdot 0,707 = \\ &= -473,31 \text{ см/с}^2; \\ a_{By} &= \sum a_{iy} = a_A^\tau + a_{B(A)}^\tau \cdot \cos 45^\circ + a_{B(A)}^n \cdot \sin 45^\circ = 60 + 30 \cdot 0,707 + 360 \cdot 0,707 = \\ &= 335,73 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль ускорения точки B вычислим по формуле:

$$\underline{\underline{a_B}} = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2} = \sqrt{(-473,31)^2 + (335,73)^2} = \underline{\underline{580,29}} \text{ см/с}^2.$$

Для определения направления вектора полного ускорения точки B строится параллелограмм на его проекциях \bar{a}_{Bx} и \bar{a}_{By} , диагональ этого параллелограмма и будет вектором ускорения точки B .

Ответ: $\omega_1 = 6 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 3 \text{ с}^{-2}$; $V_B = 168 \text{ см/с}$; $a_B = 580,3 \text{ см/с}^2$.

Пример 2.8.

В кривошипно-шатунном механизме кривошип OA вращается замедленно относительно центра O с угловой скоростью ω_0 и угловым ускорением ε_0 (рис. 2.38) и приводит в движение шатун AB .

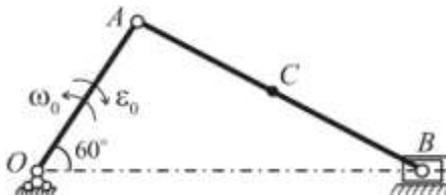


Рис. 2.38

Исходные данные: $OA = 35 \text{ см}$; $AC = 40 \text{ см}$; $\omega_0 = 4 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon_0 = 8 \text{ с}^{-2}$; $\angle(OAB) = 90^\circ$.

Для заданного положения механизма *вычислить*:

1. скорости точек A, B, C и угловую скорость шатуна AB ;
2. ускорения точек A, B, C и угловое ускорение шатуна AB .

Решение

В кривошипно-шатунном механизме кривошип OA вращается относительно центра O , шатун AB движется плоскопараллельно, ползун B движется поступательно.

1. Скорости точек и угловая скорость шатуна.

Точка A одновременно принадлежит и кривошипу OA , и шатуну AB . Рассматривая вращение кривошипа, скорость точки A рассчитываем по формуле

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 4 \cdot 35 = 140 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости \vec{V}_A перпендикулярен кривошипу OA и направлен в сторону угловой скорости кривошипа (рис. 2.39).

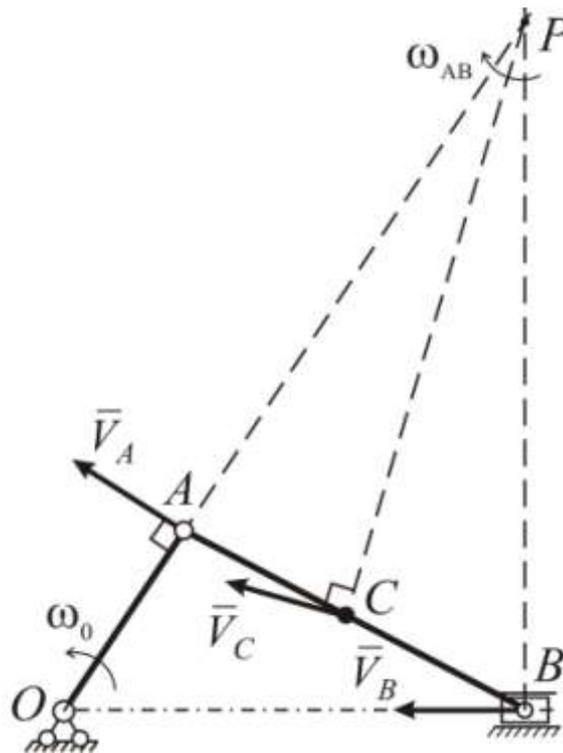


Рис. 2.39

Рассмотрим движение шатуна AB . Заменим плоское движение шатуна AB мгновенно-вращательным относительно мгновенного центра скоростей (МЦС). Вектор скорости точки B шатуна направлен вдоль направляющих ползуна, в данном случае – по горизонтали. Для нахождения МЦС восстановим перпендикуляры к построенным векторам скоростей \vec{V}_A и \vec{V}_B , на их пересечении будет находиться МЦС шатуна – точка P (рис. 2.39).

Направление мгновенного вращения шатуна AB вокруг МЦС – ω_{AB} – определяем по направлению вращения вектора \vec{V}_A относительно точки P .

Величина угловой скорости шатуна и скорости точек рассчитывается из выражения:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}.$$

Если положение кривошипно-шатунного механизма фиксировано и начерчено в масштабе, то расстояния BP и CP измеряются с чертежа линейкой. В общем случае рассматривают геометрию задачи (рис. 2.39).

Рассмотрим треугольники OAB и OPB :

из ΔOAB

$$AB = OA \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 35 \cdot \sqrt{3} = 60,6 \text{ см};$$

из ΔOAB

$$PA = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = OA \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ = 35 \cdot (\sqrt{3})^2 = 105 \text{ см},$$

$$\begin{aligned} PC &= \sqrt{AP^2 + AC^2} = \sqrt{OA^2 \operatorname{tg}^4 (60^\circ) + AC^2} = \\ &= \sqrt{35^2 \cdot (\sqrt{3})^4 + 40^2} = 112,4 \text{ см}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{140}{105} = 1,33 \text{ с}^{-1};$$

$$V_C = \omega_{AB} PC = 1,33 \cdot 112,4 = 149,5 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости \vec{V}_C перпендикулярен отрезку PC и направлен в сторону мгновенного вращения шатуна ω_{AB} (рис. 2.39).

Скорость точки B можно вычислить из выражения $V_B = \omega_{AB} PB$ (для этого надо определить PB), или удобнее воспользоваться первым следствием теоремы о скорости точки плоской фигуры: проекции скоростей точек A и B на прямую (AB) равны:

$$V_A \cos 0^\circ = V_B \cos 30^\circ,$$

$$\text{тогда } V_B = \frac{V_A \cos 0^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{140 \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{280\sqrt{3}}{3} = 161,7 \text{ см/с}.$$

2. Ускорения точек и угловое ускорение шатуна.

Определим ускорение точки A . Так как движение кривошипа OA вращательное, то

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n \Rightarrow$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 8 \cdot 35 = 280 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 4^2 \cdot 35 = 560 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{280^2 + 560^2} = 626,1 \text{ см/с}^2.$$

Рассчитываем ускорение точки B ползуна. Для этого рассмотрим её в движении с шатуном AB . Так как ускорение точки A уже найдено, то принимаем точку A за полюс, тогда по теореме

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B(A)},$$

$$\text{или} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B(A)}^n + \vec{a}_{B(A)}^\tau = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{B(A)}^n + \vec{a}_{B(A)}^\tau,$$

здесь (рис. 2.40, a): вектор $\vec{a}_{B(A)}^n$ направлен по шатуну AB от точки B к точке A ; вектор $\vec{a}_{B(A)}^\tau$ располагаем перпендикулярно шатуну AB (направление выбираем произвольно, т. к. направление ε_{AB} пока неизвестно):

$$a_{B(A)}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1,33^2 \cdot 60,6 = 107,2 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{B(A)}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Прикладываем векторы \vec{a}_A^τ , \vec{a}_A^n , $\vec{a}_{B(A)}^\tau$, $\vec{a}_{B(A)}^n$ к точке B (рис. 2.40, b).

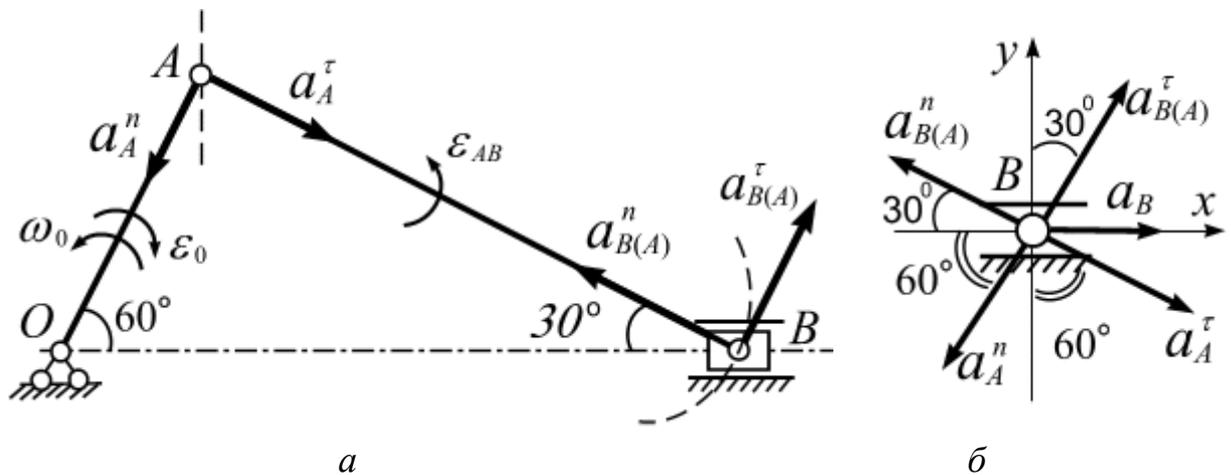


Рис. 2.40

Ускорение точки B определяется векторным уравнением:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B(A)}^n + \bar{a}_{B(A)}^\tau = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{B(A)}^n + \bar{a}_{B(A)}^\tau. \quad (\text{a})$$

Таким образом, получили векторное равенство с двумя неизвестными: a_B и $a_{B(A)}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$.

Вычислить a_B и ε_{AB} можно двумя способами – аналитическим и геометрическим. Рассмотрим каждый из указанных способов.

Аналитический способ. Начало декартовой системы координат совместим с точкой B , одну из осей выбираем перпендикулярно одной из неизвестных, например, ось B_y перпендикулярна оси направляющих ползуна (т. е. $\perp \bar{a}_B$), тогда ось B_x – вдоль направляющих ползуна (рис. 2.40, б). Вектор ускорения ползуна \bar{a}_B направлен вдоль оси B_x , поэтому проекция вектора \bar{a}_B на ось B_y равна нулю. Из (а) получаем:

$$y \rightarrow 0 = -a_A^\tau \sin 30^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{B(A)}^n \sin 30^\circ + a_{B(A)}^\tau \cos 30^\circ;$$

$$\begin{aligned} a_{B(A)}^\tau &= \frac{a_A^n \cos 30^\circ + a_A^\tau \sin 30^\circ - a_{B(A)}^n \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \\ &= \frac{560 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 280 \cdot \frac{1}{2} - 107,2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 659,8 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$x \rightarrow a_B = a_A^\tau \cdot \cos 30^\circ - a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_{B(A)}^n \cdot \cos 30^\circ + a_{B(A)}^\tau \cdot \sin 30^\circ$$

$$a_B = 280 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 560 \cdot \frac{1}{2} - 107,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 659,8 \cdot \frac{1}{2} = 199,5 \text{ см/с}^2.$$

Знаки (+) у $a_{B(A)}^\tau$ и a_B означают, что направления этих векторов, указанные на рис. 2.40, верны.

Вычисляем угловое ускорение шатуна:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^{\tau}}{AB} = \frac{659,8}{60,6} = 10,9 \text{ с}^{-2},$$

направление ε_{AB} определяется вращением вектора $\bar{a}_{B(A)}^{\tau}$ относительно полюса A , т. е. получаем против хода часовой стрелки (рис. 2.40, а).

Вычислим ускорение точки C (рис. 2.41).

По теореме ускорение точки C :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{C(A)}^n + \bar{a}_{C(A)}^{\tau}, \quad (б)$$

здесь (рис. 2.41, а): вектор $\bar{a}_{C(A)}^n$ направлен по шатуну AB от точки C к точке A ; вектор $\bar{a}_{C(A)}^{\tau}$ перпендикулярно шатуну AB по найденному направлению ε_{AB} вокруг полюса A .

$$a_{C(A)}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 1,33^2 \cdot 40 = 70,8 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_{C(A)}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 10,9 \cdot 40 = 436 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Сводим вектора \bar{a}_A^{τ} , \bar{a}_A^n , $\bar{a}_{C(A)}^{\tau}$, $\bar{a}_{C(A)}^n$ в точку C (рис. 2.41 б).

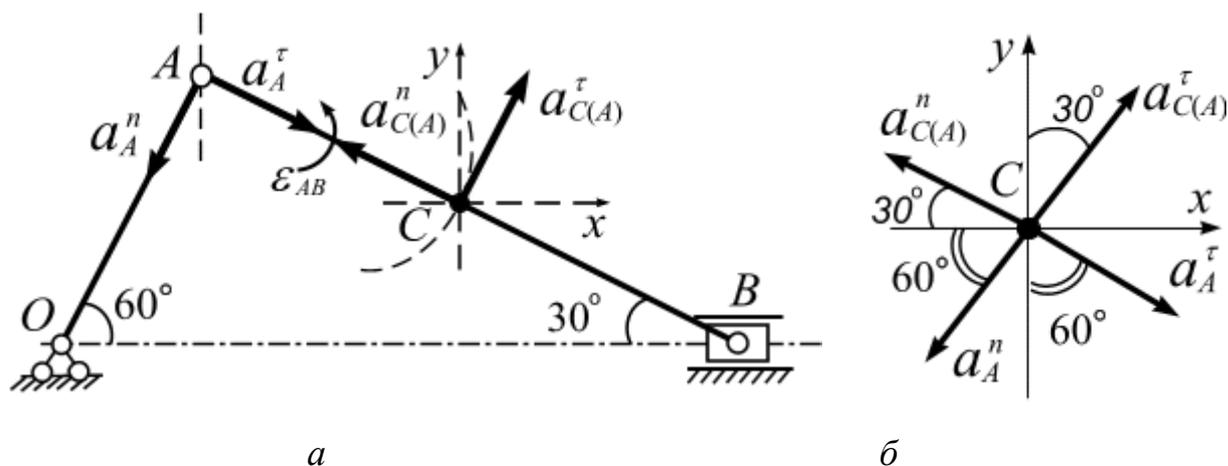


Рис. 1.41

Спроецируем записанное векторное равенство (б) на оси Cx и Cy (рис. 2.41, б):

$$\begin{aligned} x \rightarrow a_{Cx} &= a_A^\tau \cdot \cos 30^\circ - a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_{C(A)}^n \cdot \cos 30^\circ + a_{C(A)}^\tau \cdot \sin 30^\circ = \\ &= 280 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 560 \cdot \frac{1}{2} - 70,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 436 \cdot \frac{1}{2} = 119,2 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \rightarrow a_{Cy} &= -a_A^\tau \cdot \sin 30^\circ - a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_{C(A)}^n \cdot \sin 30^\circ + a_{C(A)}^\tau \cdot \cos 30^\circ = \\ &= -280 \cdot \frac{1}{2} - 560 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 70,8 \cdot \frac{1}{2} + 436 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -212 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль ускорения точки C :

$$\underline{\underline{a_C}} = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{(119,2)^2 + (-212)^2} = 243,2 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $V_A = 140 \text{ см/с}$; $V_B = 161,7 \text{ см/с}$; $V_C = 149,5 \text{ см/с}$; $\omega_{AB} = 1,33 \text{ с}^{-1}$;
 $a_A = 626,1 \text{ см/с}^2$; $a_B = 199,5 \text{ см/с}^2$; $a_C = 243,2 \text{ см/с}^2$; $\varepsilon_{AB} = 10,9 \text{ с}^{-2}$.

3. СТАТИКА

3.1. Основные элементы статики

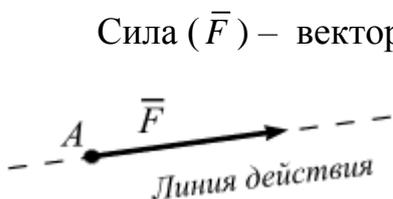


Рис. 3.1

Сила (\vec{F}) – векторная величина (рис. 3.1). Под действием силы тело совершает движение. Сила характеризуется величиной (модулем), направлением (линией действия) и точкой приложения A (рис. 3.1).

Одно из важнейших свойств силы – *сила скользящий вектор*, т. е. действие силы на твердое тело не изменится от переноса вектора силы вдоль своей линии действия.

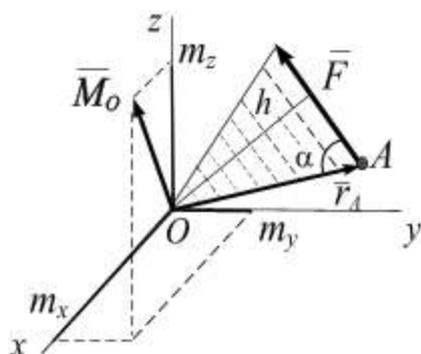


Рис. 3.2

Моментом силы \vec{F} относительно центра O называется вектор \vec{M}_O , равный векторному произведению радиуса вектора \vec{r}_A , соединяющего центр O с точкой приложения силы A и силы \vec{F} :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} \text{ [Н}\cdot\text{м]}. \quad (3.1)$$

Вычислим модуль \vec{M}_O :

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{r}_A \times \vec{F}| = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h,$$

здесь $h = r_A \sin \alpha$.

Пусть x_A, y_A, z_A – координаты радиус-вектора \vec{r}_A ; F_x, F_y, F_z – координаты силы \vec{F} , тогда (рис. 3.2)

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = m_x \vec{i} + m_y \vec{j} + m_z \vec{k},$$

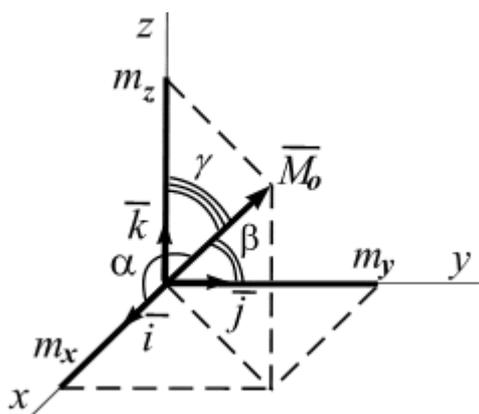


Рис. 3.3

здесь

$$m_x = (y_A F_z - z_A F_y); m_y = (z_A F_x - x_A F_z);$$

$$m_z = (x_A F_y - y_A F_x). \quad (3.2)$$

Модуль момента M_O , если известны m_x , m_y и m_z ,

$$M_O = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}. \quad (3.3)$$

Направление вектора \overline{M}_O определяется направляющими косинусами (рис. 3.3).

$$\cos \alpha = \frac{m_x}{M_O}, \cos \beta = \frac{m_y}{M_O}, \cos \gamma = \frac{m_z}{M_O}. \quad (3.4)$$

Проекции вектора \overline{M}_O (\overline{F}) на оси координат $Oxuz$ — m_x, m_y, m_z , называют моментами силы \overline{F} относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Для плоской системы сил моментом силы относительно моментной точки O называют величину, равную произведению силы F на плечо h , взятому с соответствующим знаком (рис. 3.4)

$$M_O = \pm F \cdot h.$$

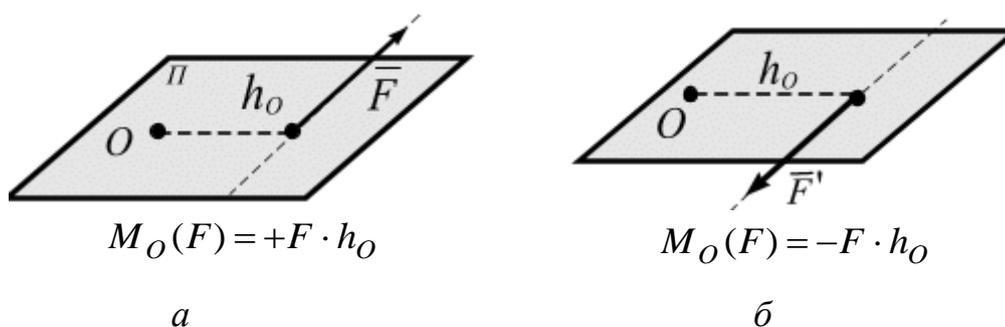


Рис. 3.4

Пара сил. Система сил \vec{F}, \vec{F}' , состоящая из двух параллельных сил, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной линии действия, называется *парой сил* (рис. 3.5).

Кратчайшее расстояние между линиями действия пары (d) называется *плечом пары* (рис. 3.5). Пара сил не имеет равнодействующей. Плоскость, проходящая через векторы пары сил, называется *плоскостью действия пар*. Момент пары сил является вектором, равным

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}' = \vec{BA} \times \vec{F}. \quad (3.5)$$

Модуль пары сил соответствует площади параллелограмма, построенного на векторах пары

$$|\vec{M}| = |\vec{AB} \times \vec{F}'| = F \cdot d.$$

Момент пары – свободный вектор (может быть приложен к любой точке).

Модуль момента пары сил $M = |\vec{M}|$ *положительный*, когда пара стремится повернуть тело против часовой стрелки (рис. 3.5, а), и *отрицательный* – по ходу часовой стрелки (рис. 3.5 б).

$$M = |\vec{M}| = \pm F \cdot d. \quad (3.6)$$

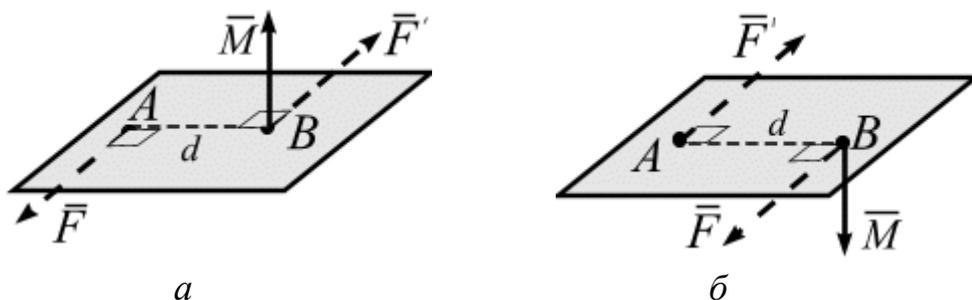


Рис.3.5

На практике пару сил (рис. 3.6, а) изображают или в виде двух параллельных сил (рис. 3.6, б), или дуговой стрелкой по направлению вращения пары (рис. 3.6, в).

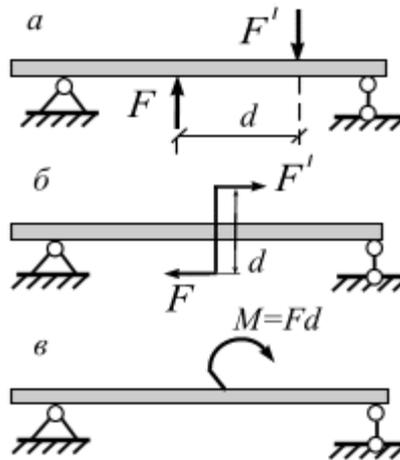


Рис. 3.6

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей (для плоской системы сил): если рассматриваемая плоская система сил приводится к равнодействующей, то момент этой равнодействующей относительно какой-либо точки равен алгебраической сумме моментов всех сил данной системы относительно самой точки.

Применим теорему Вариньона для случая на рис. 3.7. Момент силы \vec{F} относительно точки O можно определить как $M_O(\vec{F}) = F \cdot h$, или воспользоваться теоремой. Так как сила \vec{F} является равнодействующей для системы сил (\vec{F}_x, \vec{F}_y) , то

$$\begin{aligned} M_O(\vec{F}) &= M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y) = F_x \cdot y_A + F_y \cdot x_A = \\ &= F \cdot \cos \alpha \cdot y_A + F \cdot \sin \alpha \cdot x_A \end{aligned}$$

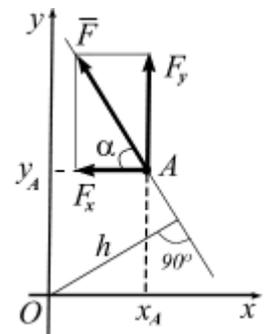


Рис. 3.7

Связи и их реакции

Гибкая невесомая нерастяжимая нить. Невесомый стержень, шарнирно закрепленный по концам. Связь в виде гибкой невесомой нерастяжимой нити (троса, каната и т. д.) или невесомого стержня, шарнирно закрепленного по концам (рис. 3.8, а), не дает телу удаляться от точек подвеса в единственном направлении – вдоль нити или стержня. Выделим замкнутой кривой тело, равновесие которого определяем, отбросим гибкие связи и

заменим их действие силами реакций связей (T_A и T_B), направим силы реакций связей вдоль нитей (стержня) к точкам ее (его) подвеса (рис. 3.8, б).

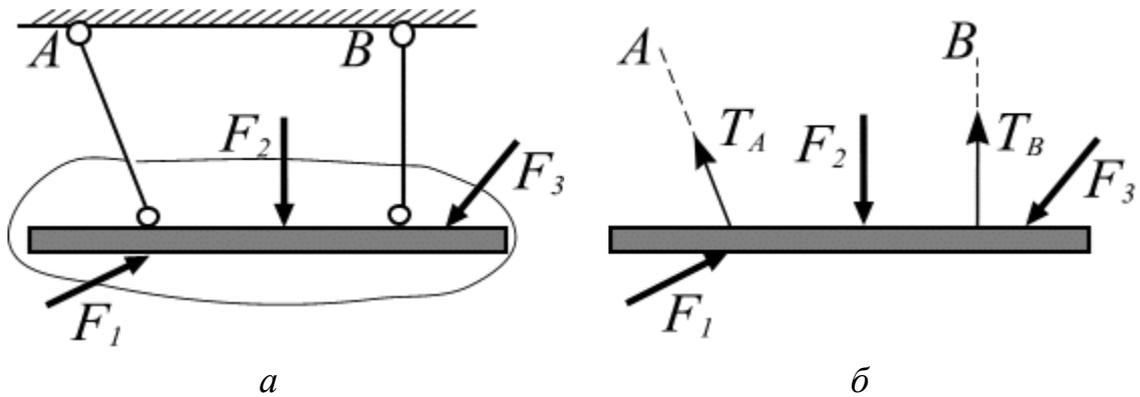


Рис. 3.8

Гладкая поверхность (плоскость) или опора. Гладкая поверхность не дает телу перемещаться только в направлении общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 3.9, а, б). Выделим замкнутой кривой тело, равновесие которого определяем (рис. 3.9, а), отбросим связь (поверхность) и заменим ее действие силой реакции связи (N), которая направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (рис. 3.9, б). В результате на тело будут действовать две силы – вес тела mg и реакция опоры N .

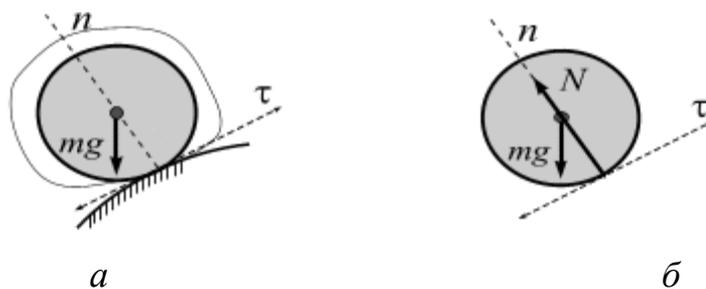


Рис. 3.9

Когда одно из соприкасающихся тел касается другого тела в точке (рис. 3.10), то реакция поверхности направлена по нормали к другой поверхности.

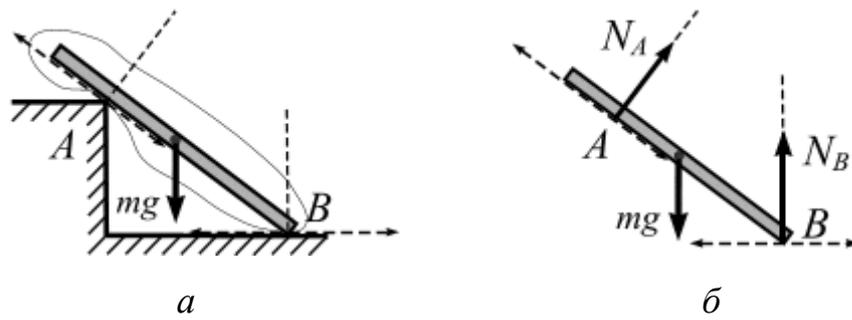


Рис. 3.10

Когда одно из тел лежит на поверхности другого тела (рис. 3.11, *a, б*), то реакция поверхности направлена по нормали к другой поверхности и проходит через точку центра тяжести тела.

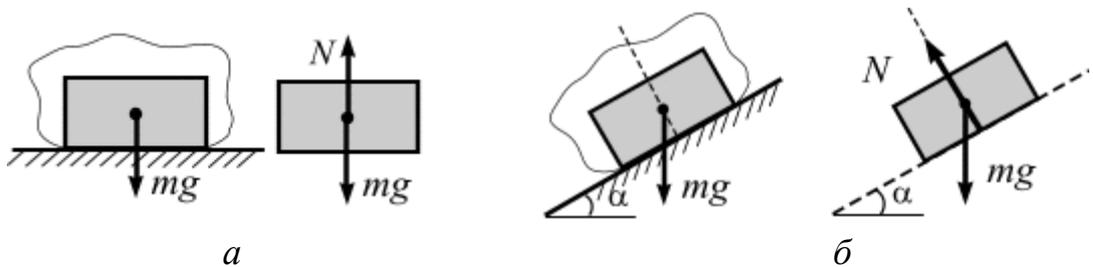


Рис.3.11

Шарнирное соединение, или шарнир, представляет собой устройство (*C*), связывающее два тела *A* и *B* (рис. 3.12, *a*) и позволяющее телам поворачиваться в плоскости вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Осевая линия будет осью шарнира. Шарнирное соединение накладывает 2 связи. Следовательно, выделяя тела *A* и *B* (разрезая шарнир),

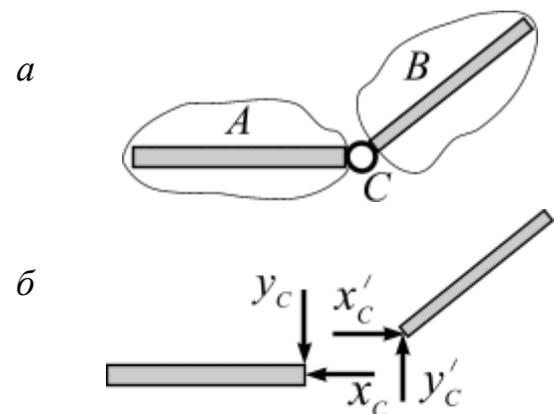


Рис. 3.12

действие связи заменяют реакциями связи x_C, y_C слева от сечения и x'_C, y'_C справа от сечения *C*, равных по модулю и противоположных по направлению (рис. 3.12, *б*).

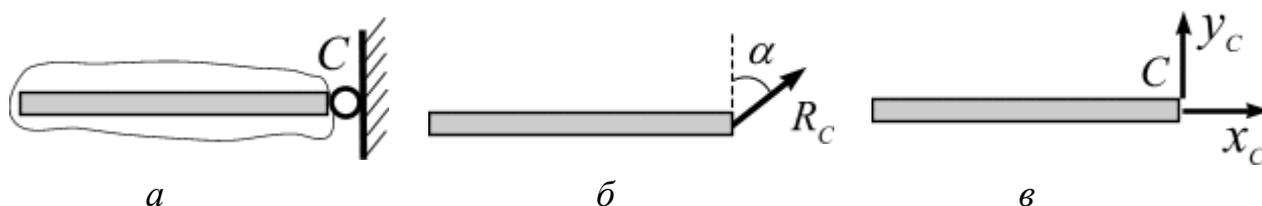


Рис. 3.13

Если балка соединена с гладкой поверхностью шарниром (рис. 3.13, *a*), то, отбрасывая связь, принято заменять ее реакцией \bar{R}_C (рис. 3.13, *б*), которую можно раскладывать на два нормальных направления: горизонтальное x_C и вертикальное y_C , рис. 3.13, *в*. Тогда: $R_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$, $\cos \alpha = \frac{y_C}{R}$.

Шарнирно-подвижная опора. Эта опора (рис. 3.14, *a*) допускает перемещение тела, опертого на эту опору, в направлении, параллельном опорной плоскости, и вращение тела в плоскости относительно шарнира. В строительной документации такую опору принято изображать в виде короткого стержня (рис. 3.14, *б*) с шарнирами на концах (опорная связь). Реакция опоры R_A направлена перпендикулярно опорной поверхности (рис. 3.14, *в*).

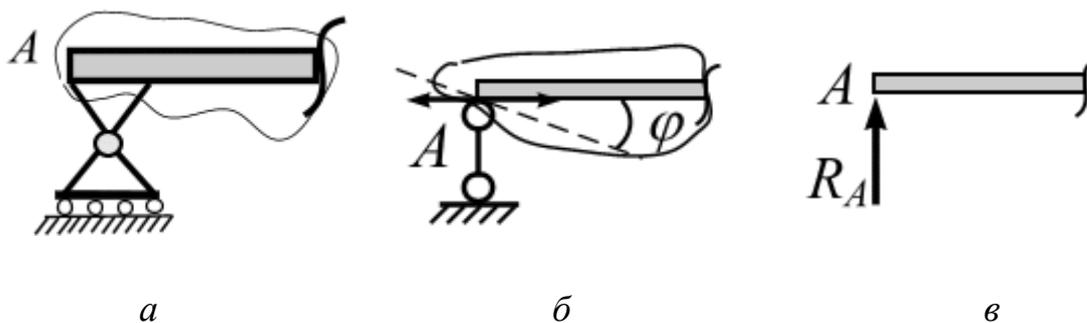


Рис. 3.14

Шарнирно-неподвижная опора. Эта опора (рис. 3.15, *a*) допускает вращение тела, опертого на эту опору в плоскости, относительно шарнира и не допускает линейных перемещений. Линия действия реакции опоры проходит через ось шарнира под углом α (рис. 3.15, *б*).

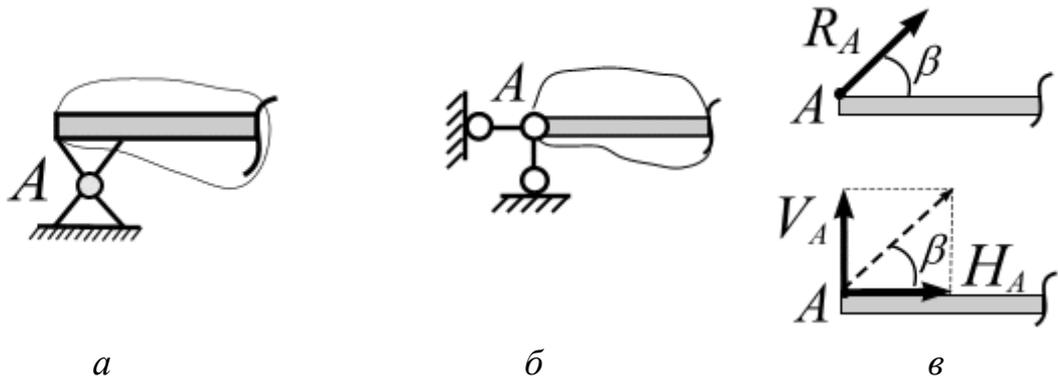


Рис. 3.15

Реакция этой опоры содержит две неизвестные – модуль R и угол α . На практике часто, но не всегда, принято раскладывать \bar{R} на два ортогональных направления: горизонтальное H_A и вертикальное V_A , которые обозначаются двумя опорными стержнями – носителями этих двух составляющих (рис. 3.15, в). Тогда $R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2}$, $\cos \beta = \frac{H_A}{R_A}$.

Реакции заделки. Крепление балки AB , один конец которой заделан в стену, называют заделкой в точке A (рис. 3.16), или консолью.

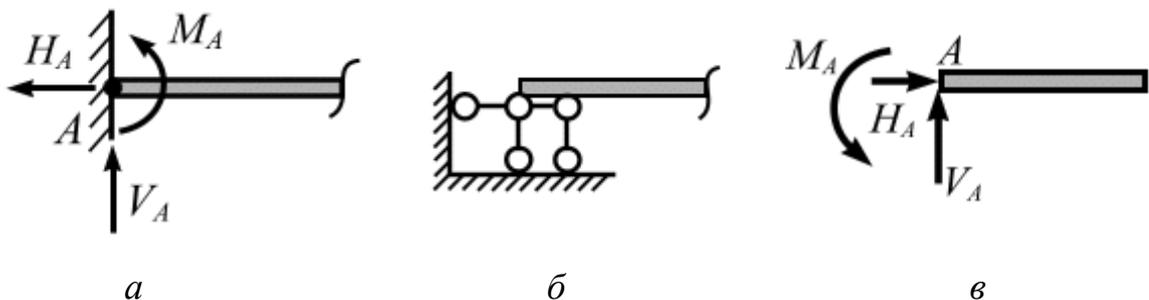


Рис. 3.16

Жесткое закрепление, или заделка, не допускает поворота опорного сечения и его перемещения по горизонтали и вертикали, т. е. на это сечение наложено три связи. В такой опоре возникают три реакции: V_A , H_A и реактивный момент M_A (рис. 3.16, в).

Распределенные нагрузки

Прямоугольно-распределенная нагрузка. Пусть на участке ab , длина которого ℓ (рис. 3.17, a), равномерно распределена нагрузка интенсивностью q . Распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой \bar{Q} , направленной параллельно силам и приложена в середине отрезка ab :

$$Q = q \cdot \ell .$$

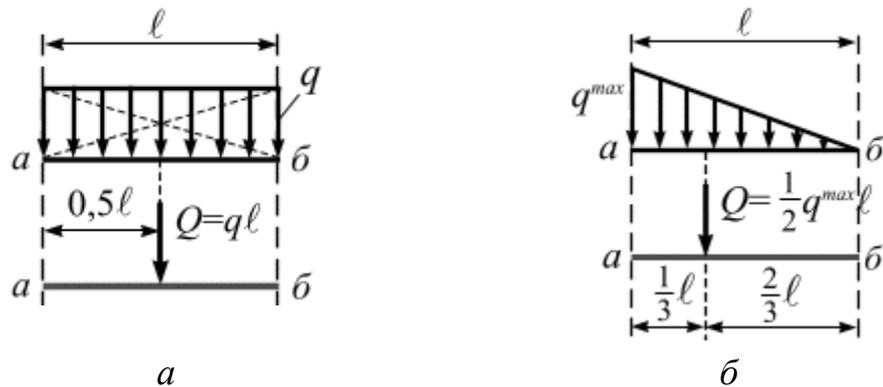


Рис. 3.17

Треугольно-распределенная нагрузка. На участок ab (рис. 3.17, b), длина которого ℓ , приложена треугольно-распределенная нагрузка интенсивностью q^{\max} . Равнодействующая \bar{Q} треугольно-распределенной нагрузки направлена параллельно q^{\max} , приложена в точку, которая делит отрезок ab в соотношении $\frac{1}{3}\ell : \frac{2}{3}\ell$. \bar{Q} расположена ближе к большей интенсивности и равна

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot \ell .$$

Основная форма условий равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на любые две ортогональные оси (например, оси Ox и Oy) были равны нулю и сумма моментов сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_A(\bar{F}_i) = 0.$$

Точка A называется *точкой приведения* или *моментной точкой*.

Содержание контрольных работ для студентов на тему «уравнения равновесия плоской системы сил» дано в приложении (контрольная работа 3, задача 1).

Пример 3.1. Вычислить реакции в консольной балке. Балка нагружена, как показано на рис. 3.18, *а*. Дано: $q = 6$ кН/м, $a = 1$ м.

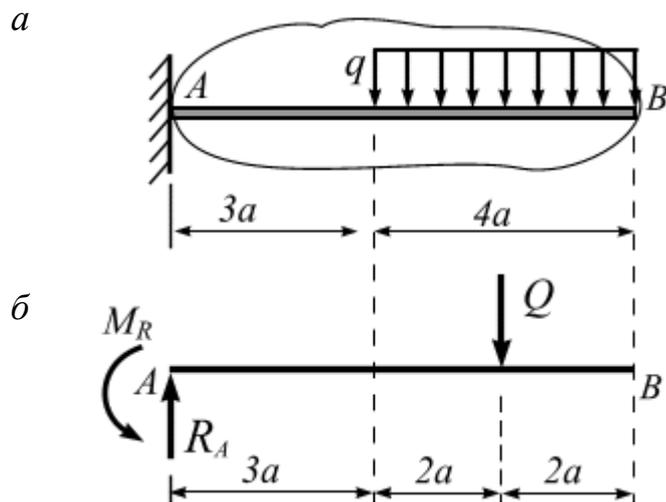


Рис. 3.18

Решение. Отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 3.18, *б*). Распределенную нагрузку интенсивностью q заменим равнодействующей:

$$Q = q \cdot 4a = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 24 \text{ кН.}$$

Запишем основную форму уравнений равновесия и решим их:

$$\begin{aligned} \sum M_{Ai} = 0, \quad -Q \cdot (2a + 3a) + M_R = 0; \\ -24 \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) + M_R = 0 \rightarrow M_R = 120 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad R_A - Q = 0, \quad R_A - 24 = 0 \rightarrow R_A = 24 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum M_{Bi} = M_R - R_A \cdot 7a + Q \cdot 2a = 120 - 24 \cdot 7 \cdot 1 + 24 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$

Ответ: $R_A = 15,3$ кН; $M_R = 73,9$ кН·м.

Пример 3.2. Вычислить реакции в консольной балке. Балка нагружена, как показано на рис. 3.19, а. Дано: $q_{\max} = 16$ кН/м, $a = 2$ м.

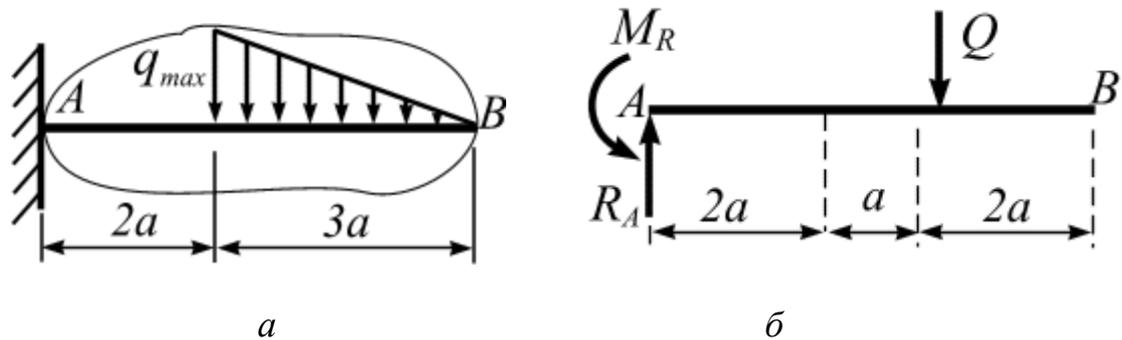


Рис. 3.19

Решение. Отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 3.19, б). Рассмотрим равновесие балки AB . Распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой Q :

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 = 16 \text{ кН.}$$

Линия действия Q делит отрезок, равный $3a$, в соотношении $\frac{1}{3} \cdot 3a : \frac{2}{3} \cdot 3a$ (рис. 3.19, б).

Запишем уравнения равновесия и решим их.

$$\sum M_{Ai} = 0, \quad -Q \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3a + 2a\right) + M_R = 0; \quad M_R = 96 \text{ кН·м;}$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad R_A - Q = 0; \quad R_A = Q = 16 \text{ кН;}$$

Проверка: $\sum M_{Bi} = M_R - R_A \cdot 5a + Q \cdot 2a = 96 - 16 \cdot 10 + 16 \cdot 4 = 0$.

Ответ: $R_A = 16$ кН, $M_R = 96$ кН·м.

Пример 3.3. Для заданной консольной балки AB (рис. 3.20) требуется:

- вычислить реакции опор наложенных связей;
- проверить правильность полученных результатов.

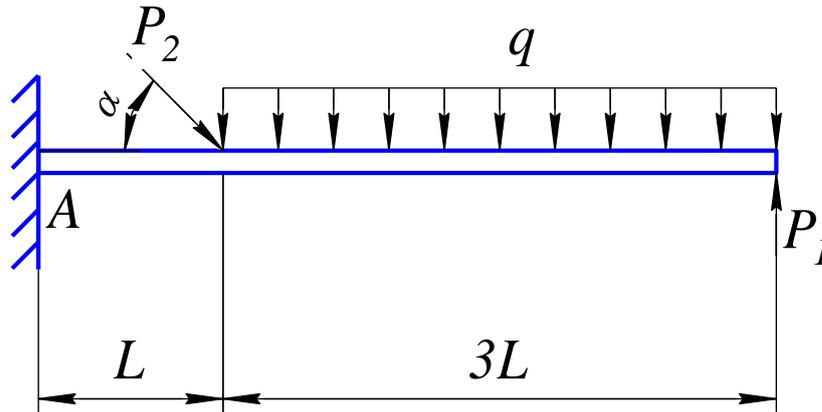


Рис. 3.20

Дано: $P_1 = 20$ кН; $P_2 = 10$ кН; $q = 9$ кН/м; $L = 2$ м; $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Рассмотрим равновесие консольной балки AB . Для этого: укажем все заданные силы; освободим балку от связей, заменив их действия реакциями (рис. 3.21).

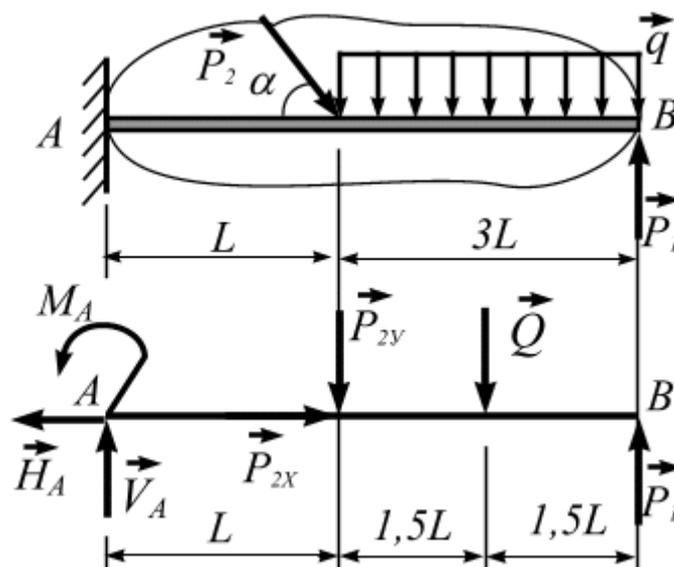


Рис. 3.21

Связь – жесткая заделка имеет три реакции: H_A , V_A , M_A .

Прямоугольно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой

$$Q = q \cdot 3L = 9 \cdot 3 \cdot 2 = 54 \text{ кН.}$$

Силу \vec{P}_2 разложим на две составляющие, для которых она является равнодействующей: \vec{P}_{2x} и \vec{P}_{2y} , где $|\vec{P}_{2x}| = P_2 \cos \alpha$ и $|\vec{P}_{2y}| = P_2 \sin \alpha$.

Составим систему уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} = 0, & -H_A + P_2 \cos \alpha = 0; \\ \Sigma F_{iy} = 0, & V_A - P_2 \sin \alpha - Q + P_1 = 0; \\ \Sigma M_{Ai} = 0, & M_A - P_2 L \sin \alpha - Q \cdot 2,5L + P_1 \cdot 4L = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим:

$$H_A = P_2 \cos \alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = 8,66 \text{ кН};$$

$$V_A = P_2 \sin \alpha + Q - P_1 = 10 \cdot 0,5 + 54 - 20 = 39 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_A &= P_2 \cdot \sin \alpha \cdot L + Q \cdot 2,5L - P_1 \cdot 4L = \\ &= 10 \cdot 0,5 \cdot 2 + 54 \cdot 2,5 \cdot 2 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 120 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Проверка (для проверки составляют уравнение, которое не использовалось при решении):

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Bi} &= Q \cdot 1,5L + P_2 \sin \alpha \cdot 3L - V_A \cdot 4L + M_A = \\ &= 54 \cdot 1,5 \cdot 2 + 10 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 2 - 39 \cdot 4 \cdot 2 + 120 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $H_A = 8,66 \text{ кН}$, $V_A = 39 \text{ кН}$, $M_A = 120 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Вторая форма условий равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно двух любых точек приведения А и В и сумма проекций этих сил на ось, перпендикулярную прямой АВ, были равны нулю:

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum F_{ix} = 0.$$

За точки приведения принимают точки пересечения линий действий реакций опор. Вторую форму условий равновесия обычно применяют для вычислений реакций шарнирно опертых балок.

Пример 3.4. Вычислить реакции опор балки AB , опертой на шарнирно-подвижную и шарнирно-неподвижную опоры, нагруженной, как показано на рис. 3.22, *а*. Дано: $P = 10$ кН, $q = 4$ Н/м, $L = 6$ м, $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Используя метод сечения, отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 3.22, *б*).

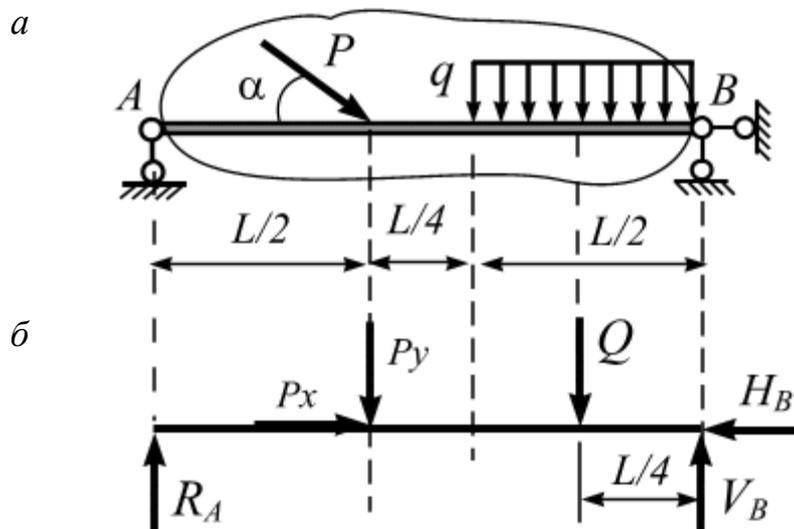


Рис. 3.22

Распределенную нагрузку интенсивностью q заменим равнодействующей: $Q = q \cdot \frac{L}{2} = 4 \cdot \frac{6}{2} = 12$ кН.

Разложим силу P на составляющие P_x и P_y :

$$P_y = P \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}, \quad P_x = P \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,87 = 8,7 \text{ кН}.$$

За точки приведения примем точки на шарнирах балки, т. е. точку A (точка пересечения линий действий реакции опор V_A и H_B) и точку B (точка пересечения линий действий реакции опор V_B и H_B). Запишем уравнения равновесия:

$$\sum M_{Ai} = 0, \quad V_B \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} \right) - Q \left(\frac{L}{4} + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} \right) - P_y \cdot \frac{L}{2} = 0,$$

$$V_B = \frac{4}{5} \left(Q + \frac{1}{2} P_y \right) = \frac{4}{5} \left(12 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = 11,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_{Bi} = 0, \quad -R_A \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} \right) + P_y \left(\frac{L}{4} + \frac{L}{2} \right) + Q \cdot \frac{L}{4} = 0,$$

$$R_A = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{4} Q + \frac{3}{4} P_y \right) = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{4} \cdot 12 + \frac{3}{4} \cdot 5 \right) = 5,4 \text{ кН};$$

$$\sum F_{ix} = 0, \quad P_x - H_B = 0, \quad H_B = P_x = 8,7 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_{iy} = R_A - P_y - Q + V_B = 5,4 - 5 - 12 + 11,6 = 0.$$

Ответ: $H_B = 8,7$ кН, $V_B = 11,6$ кН; $V_A = 5,4$ кН.

Пример 3.5. Вычислить реакции опор балки AB , опертой на шарнирно-подвижную и шарнирно-неподвижную опоры, нагруженной, как показано на рис. 3.23, а. Дано: $P = 10$ кН, $q = 4$ Н/м, $L = 8$ м, $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Используя метод сечения, отбросим связи и заменим их соответствующими реакциями (рис. 3.23, б).

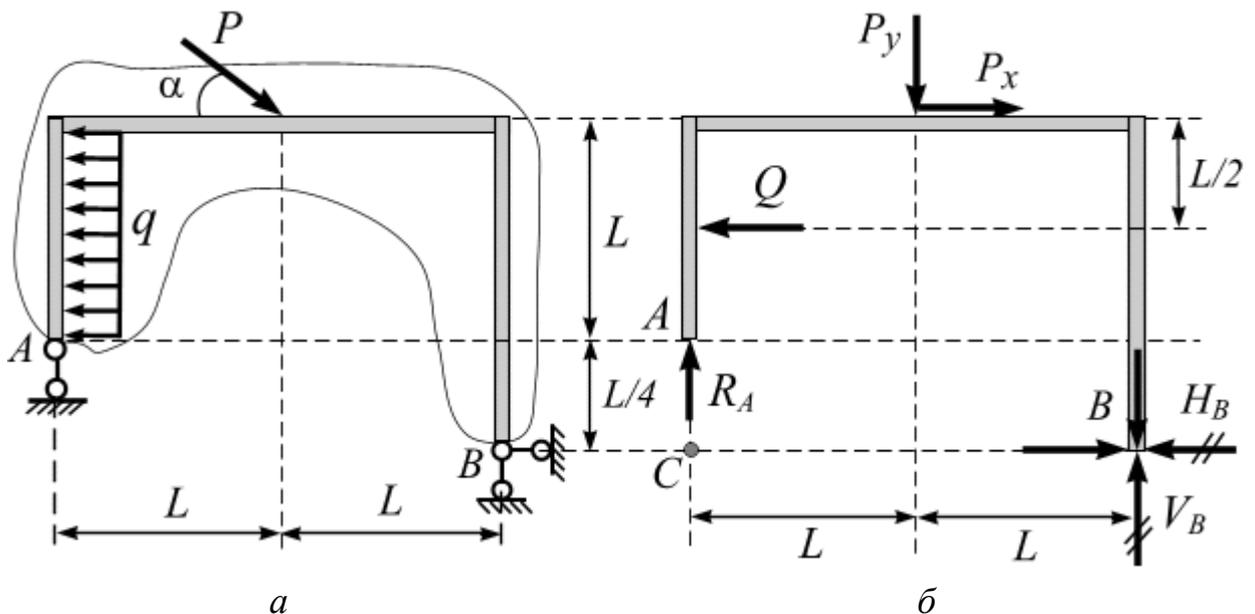


Рис. 3.23

Распределенную нагрузку интенсивностью q заменим равнодействующей: $Q = q \cdot L = 4 \cdot 8 = 32$ кН.

Разложим силу P на составляющие P_x и P_y :

$$P_y = P \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}, \quad P_x = P \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,87 = 8,7 \text{ кН}.$$

За точки приведения примем точки C (точка пересечения линий действия реакции опор V_A и H_B) и B (точка пересечения линий действия реакции опор V_B и H_B). Запишем уравнения равновесия и решим их:

$$\begin{aligned} \sum M_{Ci} = 0, \quad V_B \cdot 2L - P_y \cdot L - P_x \cdot \left(L + \frac{L}{4}\right) + Q \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) &= 0; \\ V_B \cdot 2 \cdot 8 - 5 \cdot 8 - 8,7 \cdot (8 + 2) + 32(4 + 2) &= 0; \\ V_B = \frac{1}{16}(40 + 87 - 192) = \frac{1}{16}(-65) &= -4,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

На чертеже меняем направление реакции V_B (рис. 3.21, б).

$$\begin{aligned} \sum M_{Bi} = 0, \quad -R_A \cdot 2L + Q \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) - P_x \left(L + \frac{L}{4}\right) + P_y \cdot L &= 0; \\ -R_A \cdot 2 \cdot 8 + 32 \cdot (4 + 2) - 8,7(8 + 2) + 5 \cdot 8 &= 0; \\ R_A = \frac{1}{16}(192 - 87 + 40) = \frac{1}{16}(145) &= 9,1 \text{ кН}; \\ \sum F_{ix} = 0, \quad -Q + P_x - H_B = 0, \quad H_B = -Q + P_x &= -32 + 8,7 = -23,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

На чертеже меняем направление реакции H_B , рис. 3.23, б.

$$\text{Проверка: } \sum F_{iy} = R_A - P_y - V_B = 9,1 - 5 - 4,1 = 0.$$

Ответ: $H_B = 8,7$ кН, $V_B = 11,6$ кН; $R_A = 5,4$ кН.

3.2. Плоские фермы. Способы расчета

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными.

Плоские фермы могут воспринимать нагрузку, приложенную только в их плоскости, и закрепляются опорными связями, лежащими в этой же плоскости. Пространственные фермы способны воспринимать нагрузку, действующую в любом направлении. Примером фермы может служить башенная конструкция (кран, опоры высоковольтных передач и т. п.).

Если ферма в целом под действием сил, приложенных к ее узлам, находится в равновесии, то и любой из ее узлов также будет находиться в равновесии, т. е. внешняя нагрузка, действующая на узел, и внутренние усилия в стержнях, сходящихся в данном узле, взаимно уравновешиваются.

Простейшая плоская ферма – треугольная, состоящая из трёх стержней и трёх узлов.

Рассмотрим принципы вычисления внутренних усилий в стержнях плоской фермы. При действии на ферму сосредоточенных сил, приложенных в узлах (шарнирах), в ее прямолинейных стержнях возникают продольные (растягивающие или сжимающие) силы.

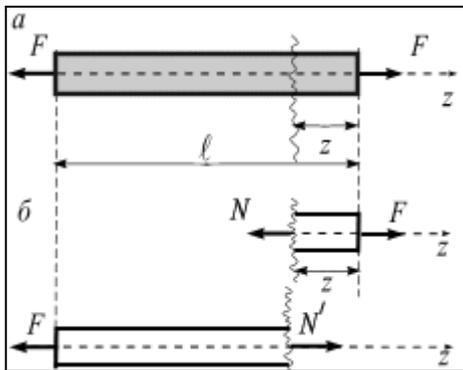


Рис. 3.24

Растяжением или сжатием стержней называется такой вид деформации, при которой все внешние нагрузки или их равнодействующие действуют вдоль оси стержня (осевые нагрузки) (рис. 3.24, а).

Для их вычисления используется метод сечения. Мысленно рассечем стержень плоскостью, перпендикулярной к его оси, проведём произвольное сечение z (рис. 3.24, б), и приложим к сечению неизвестную силу N ,

направленную по внешней нормали к сечению.

Равновесие отсеченной части возможно тогда, когда силы, действующие на отсеченную часть, равны друг другу по модулю и направлены в противоположные стороны. Запишем аналитическое условие равновесия для сечения z :

$$\sum F_{iz} = 0, \quad -N_1 + F = 0, \quad N_1 = F.$$

Следовательно, при растянутом состоянии стержней усилия в отсеченном стержне направлены от узла вдоль стержня – это состояние обычно принимается за положительное. На рис. 3.25 показаны направления усилий \vec{S} и \vec{S}' в стержне AB , растянутом силами \vec{P} и \vec{P}' .

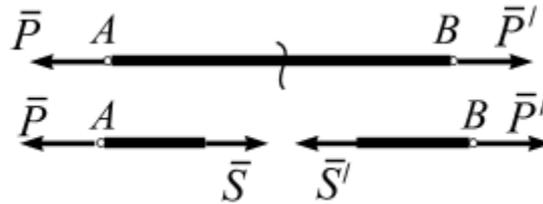


Рис. 3.25

При сжатом состоянии стержней усилия направлены от центра стержня к узлам.

При расчете фермы определяют реакции внешних наложенных связей и внутренние усилия в стержнях фермы.

Для расчета внутренних усилий в стержнях используют два способа: способ вырезания узлов и способ Риттера (или способ моментных точек).

Способ вырезания узлов. Мысленно вырезают узел фермы: указывают заданные силы, приложенные к этому узлу; действие отброшенной фермы заменяют усилиями в стержнях, присоединенных к этому узлу. Усилия направляют от узла к центрам стержней, т.е. считают их растянутыми, если при расчете получают знак минус – это означает, что стержень сжат. При вырезании узла получают систему сходящихся сил. Для плоской системы сходящихся сил система уравнений равновесия состоит из двух уравнений:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

В связи с этим последовательность вырезания узлов в плоской ферме определяется числом неизвестных усилий, приложенных к этому узлу, – их должно быть не больше двух.

Способ Риттера (или способ моментных точек). Ферму мысленно делят сечением на две части и рассматривают равновесие одной из частей: указывают заданные силы, приложенные к этой части; действие отброшенной части фермы заменяют усилиями в стержнях, через которые провели сечение. Усилия направляют от узла к центрам стержней (в сторону к отброшенной части), т. е. считают их растянутыми. Таким способом получаем произвольную плоскую систему сил, равновесие которой определяется системой из трех уравнений, соответственно, сечение следует проводить не более чем через три неизвестных стержня. При составлении уравнений используют уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия неизвестных усилий – эти точки называют моментными точками, или точками Риттера.

Содержание контрольных работ для студентов на тему «расчет плоских ферм» дано в приложении (контрольная работа 3, задача 2).

Пример 3.6. Рассмотрим плоскую ферму, показанную на рис. 3.26.

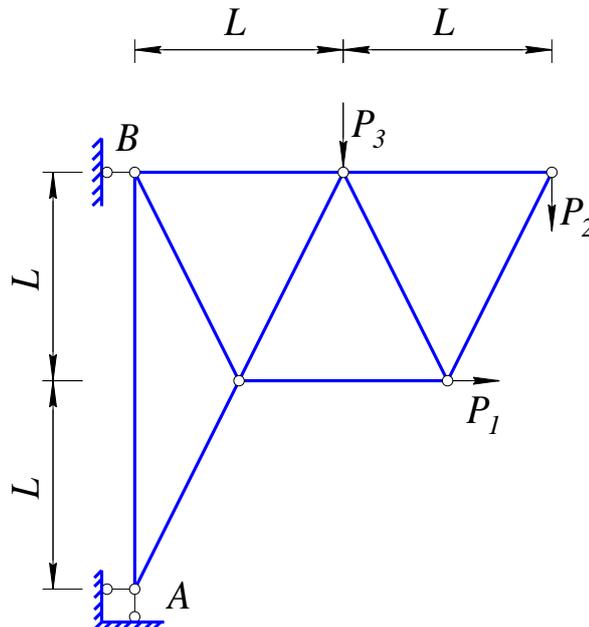


Рис. 3.26

Дано: $P_1 = 10$ кН; $P_2 = 21$ кН; $P_3 = 15$ кН; $L = 2$ м.

Требуется:

- вычислить реакции опор от заданной нагрузки;
- проверить правильность полученных результатов;
- вычислить усилия в стержнях фермы способом вырезания узлов;

- проверить правильность полученных результатов методом сплошных сечений;
- проанализировать полученные результаты.

Решение:

Из геометрии задачи вычислим значение косинусов и синусов углов, образованных стержнями в узлах фермы (рис. 3.27):

$$BD = \sqrt{L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L\sqrt{5}}{2};$$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{L\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,447;$$

$$\sin \beta = \cos \alpha = L \cdot \frac{2}{L\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,894.$$

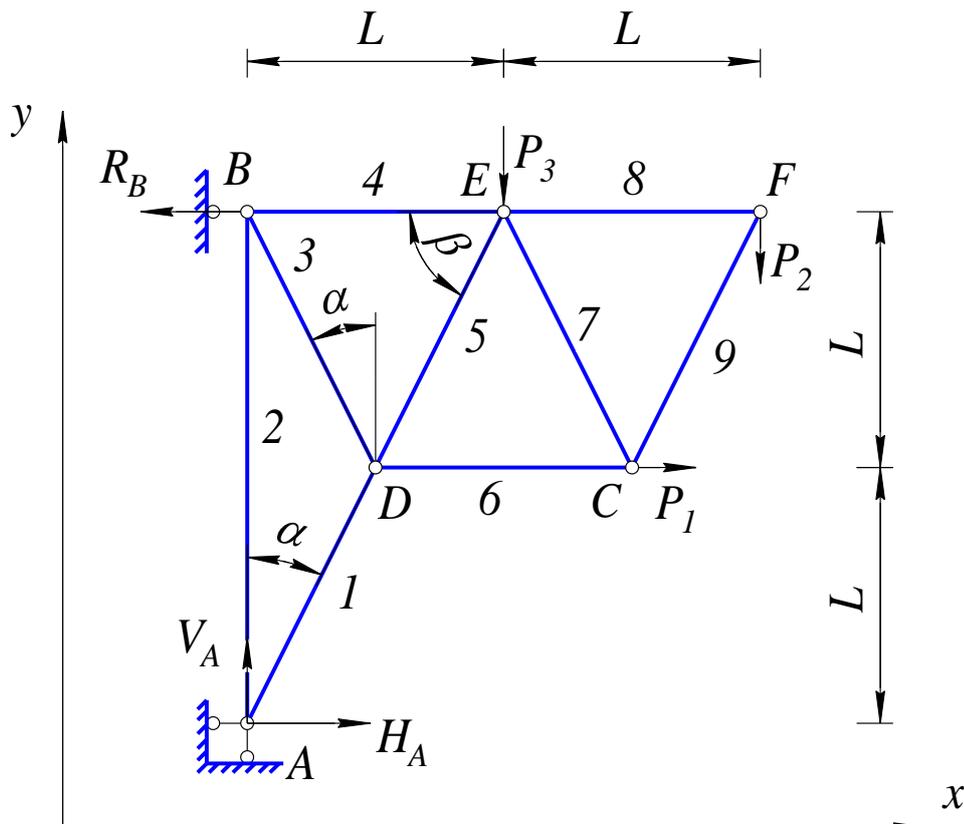


Рис. 3.27

Составим систему уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} = 0, & P_1 + H_A - R_B = 0; \\ \Sigma M_{Ai} = 0, & -P_1L + R_B \cdot 2L - P_3L - P_2 \cdot 2L = 0; \\ \Sigma F_{iy} = 0, & V_A - P_2 - P_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему:

$$\begin{aligned} H_A &= R_B - P_1 = 33,5 - 10 = 23,5 \text{ кН}; \\ R_B &= \frac{P_1L + P_3L + P_2 \cdot 2L}{2L} = \frac{10 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 21 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 33,5 \text{ кН}; \\ V_A &= P_2 + P_3 = 21 + 15 = 36 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Ci} &= -P_2 \cdot 0,5L + P_3 \cdot 0,5L + R_B L - V_A \cdot 1,5L + H_A L = \\ &= -21 \cdot 0,5 \cdot 2 + 15 \cdot 0,5 \cdot 2 + 33,5 \cdot 2 - 36 \cdot 1,5 \cdot 2 + 23,5 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Получили: $R_B = 33,5 \text{ кН}$, $H_A = 23,5 \text{ кН}$, $V_A = 36 \text{ кН}$.

Вычисление усилий в стержнях (способ вырезания узлов).

Последовательно вырезаем узлы и составляем условия равновесия для системы сходящихся сил: внешних сил и усилий в стержнях, приложенных к этому узлу.

При аналитическом способе решения считаем все стержни в растянутом состоянии (усилие направляем от узла к центру стержня).

При геометрическом способе показываем верное направление усилий.

Узел A (рис. 3.28)



Рис. 3.28

Система уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} = 0, & H_A + S_1 \sin \alpha = 0; \\ \Sigma F_{iy} = 0, & V_A + S_1 \cos \alpha + S_2 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$S_1 = -\frac{H_A}{\sin \alpha} = -23,5\sqrt{5} \text{ кН};$$

$$S_2 = -V_A - S_1 \cos \alpha = -36 - (-23,5\sqrt{5}) \frac{2}{\sqrt{5}} = 11 \text{ кН}.$$

Сделаем графическую проверку, построив замкнутый силовой многоугольник (построение выполняется в масштабе рис. 3.28, б).

Узел В (рис. 3.29)

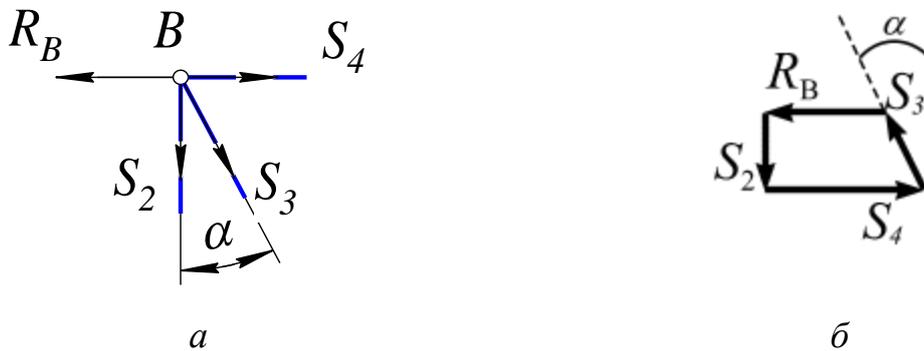


Рис. 3.29

Система уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma F_{iy} = 0, & S_3 \cos \alpha + S_2 = 0; \\ \Sigma F_{ix} = 0, & -R_B + S_4 + S_3 \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

откуда

$$S_3 = -\frac{S_2}{\cos \alpha} = -11 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = -5,5\sqrt{5} \text{ кН};$$

$$S_4 = R_B - S_3 \sin \alpha = 33,5 - (-5,5\sqrt{5}) \frac{1}{\sqrt{5}} = 39 \text{ кН}.$$

Сделаем графическую проверку, построив замкнутый силовой многоугольник (рис. 3.29, б)

Узел D (рис. 3.30)



Рис. 3.30

Система уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma F_{iy} = 0, & S_3 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha - S_1 \cos \alpha = 0; \\ \Sigma F_{ix} = 0, & -S_3 \sin \alpha + S_6 + S_5 \sin \alpha - S_1 \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

откуда

$$S_5 = S_1 - S_3 = -23,5\sqrt{5} - (-5,5\sqrt{5}) = -18\sqrt{5} \text{ кН};$$

$$S_6 = (S_3 - S_5 + S_1) \sin \alpha = (-5,5\sqrt{5} - (-18\sqrt{5}) - 23,5\sqrt{5}) \frac{1}{\sqrt{5}} = -11 \text{ кН}.$$

Сделаем графическую проверку, построив замкнутый силовой многоугольник (рис. 3.30, б).

Узел E (рис. 3.31)

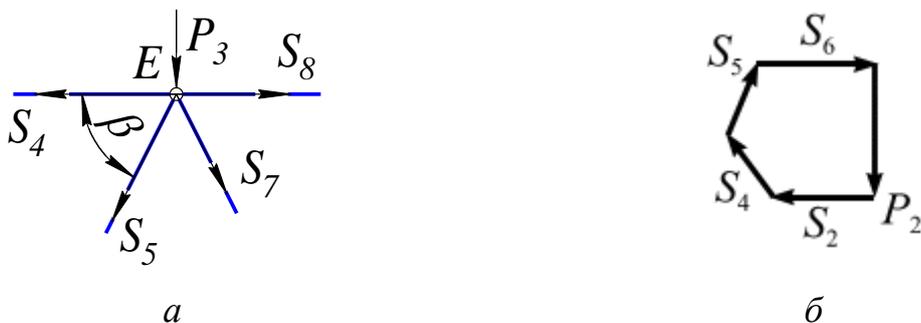


Рис. 3.31

Система уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma F_{iy} = 0, & P_3 + S_5 \sin \beta + S_7 \sin \beta = 0; \\ \Sigma F_{ix} = 0, & -S_4 - S_5 \cos \beta + S_8 + S_7 \cos \beta = 0, \end{cases}$$

откуда

$$S_7 = \frac{-P_3 - S_5 \sin \beta}{\sin \beta} = -15 \frac{\sqrt{5}}{2} - (-18\sqrt{5}) = 10,5\sqrt{5} \text{ кН};$$

$$S_8 = S_4 + S_5 \cos \beta - S_7 \cos \beta = 39 - 18\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} - 10,5\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} = 10,5 \text{ кН}.$$

Сделаем графическую проверку, построив замкнутый силовой многоугольник (рис. 3.31, б).

Узел F (рис. 3.32)

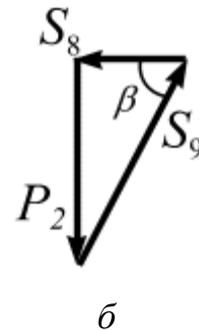
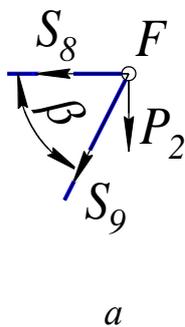


Рис. 3.32

Осталось вычислить S_9 . Для этого достаточно составить одно уравнение:

$$\Sigma F_{iy} = 0, \quad S_9 \sin \beta + P_2 = 0,$$

откуда

$$S_9 = -\frac{P_2}{\sin \beta} = -21 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = -10,5\sqrt{5} \text{ кН}.$$

Сделаем графическую проверку, построив замкнутый силовой многоугольник (рис. 3.32, б).

Способ Риттера. Проверим правильность расчета усилий в стержнях 4, 5 и 6. Для этого рассекаем ферму сечением, проходящим через эти три стержня, на две части и рассмотрим равновесие правой части фермы (рис. 3.33).

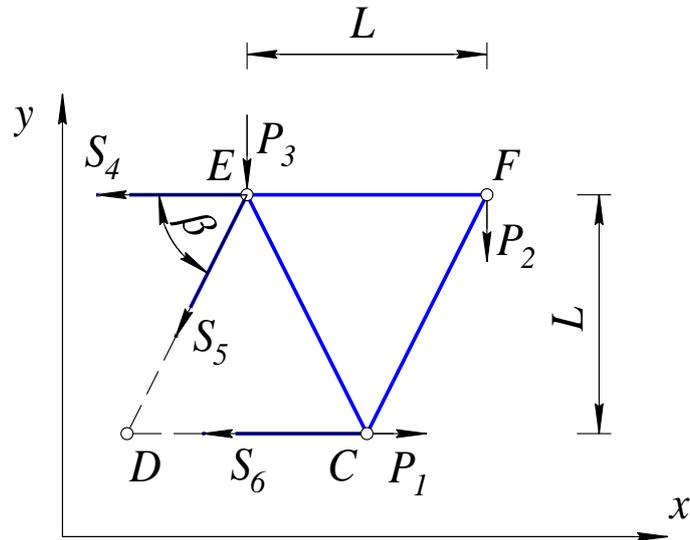


Рис. 3.33

Составим систему уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил (уравнения моментов составляем относительно точек Риттера – D и E):

$$\begin{aligned}\Sigma M_{Di} &= 0, & S_4 L - P_3 \cdot 0,5L - P_2 \cdot 1,5L &= 0; \\ \Sigma M_{Ei} &= 0, & -S_6 L + P_1 L - P_2 L &= 0; \\ \Sigma F_{iy} &= 0, & -S_5 \sin \beta - P_2 - P_3 &= 0,\end{aligned}$$

здесь ось y не перпендикулярна прямой (DE).

Отсюда

$$S_4 = \frac{P_3 \cdot 0,5L + P_2 \cdot 1,5L}{L} = \frac{15 \cdot 0,5 \cdot 2 + 21 \cdot 1,5 \cdot 2}{2} = 39 \text{ кН};$$

$$S_6 = \frac{P_1 L - P_2 L}{L} = \frac{10 \cdot 2 - 21 \cdot 2}{2} = -11 \text{ кН};$$

$$S_5 = -\frac{P_2 + P_3}{\sin \beta} = -(21 + 15) \frac{\sqrt{5}}{2} = -18\sqrt{5} \text{ кН}.$$

Значения усилий в стержнях, рассчитанные разными способами, совпадают.

Ответ: в (кН)

H_A	V_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
23,5	36	33,5	$-23,5\sqrt{5}$	11	$-5,5\sqrt{5}$	39	$-18\sqrt{5}$	-11	$10,5\sqrt{5}$	10,5	$-10,5\sqrt{5}$

Вывод: стержни 2, 4, 7, 8 растянуты;
стержни 1, 3, 5, 6, 9 сжаты.

3.3. Принципы расчета составных конструкций

Силы, действующие в рассматриваемой механической системе, подразделяются на *внутренние* и *внешние*.

Внутренними называются силы, с которыми действуют друг на друга тела и точки данной механической системы.

Внешними называются силы, с которыми на тела и точки данной механической системы действуют тела, в неё не входящие.

Связи данной механической системы также подразделяются на *внешние* и *внутренние*.

При рассмотрении механической системы, состоящей из нескольких тел, ставятся задачи определить реакций внешних и внутренних связей.

Как известно, внутренние силы представляют собой уравновешенную систему сил, и для их определения используют метод сечений, который позволяет внутренние силы перевести в разряд внешних.

Для расчета конструкций, состоящих из системы тел, соединенных шарнирами, составляют дополнительные уравнения: *сумма моментов сил, действующих на левую (правую) половину составной конструкции относительно врезанного шарнира С, равняется нулю, т. е.*

$$\sum M_{Ci}^{\text{лев.}} = 0, \quad \sum M_{Ci}^{\text{прав.}} = 0.$$

При вычислении реакций врезанного шарнира конструкцию мысленно рассекают по внутреннему шарниру (С) и рассматривают равновесие каждой части конструкции.

Содержание контрольных работ для студентов на тему «составные конструкции» дано в приложении (контрольная работа 3, задача 3).

Пример 3.7. Две балки AC и CB соединены шарниром C (рис. 3.34, *а*). Вычислить реакции опор A , B и силы давления на шарнир C , если на балку действуют $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 20$ кН, $a = 1$ м.

Решение. Для вычисления реакций опор используем метод сечения, отбросим опоры в точках A и B (рис. 3.34, *б*).

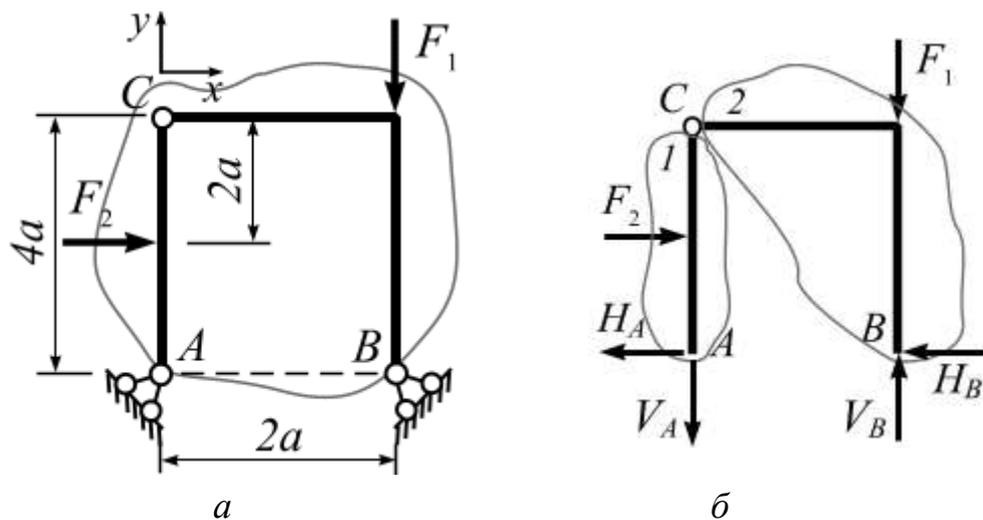


Рис. 3.34

Запишем уравнение моментов от нагрузки, расположенной слева от шарнира C (на балку AC):

$$\sum M_{Ci}^{\text{лев.}} = 0, \quad -H_A \cdot 4a + F_2 \cdot 2a = 0, \quad -H_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 0, \quad H_A = 10 \text{ кН.}$$

Запишем проекции всех сил на ось x , приложенных к балкам AC и CB (рис. 3.34, *б*):

$$\sum F_{ix} = 0, \quad -H_A + F_2 - H_B = 0, \quad -10 + 20 - H_B = 0, \quad H_B = 10 \text{ кН.}$$

Запишем уравнение моментов относительно точки A от всех сил, действующих на балки AC и CB :

$$\sum M_{Ai} = 0, \quad V_B \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - F_1 \cdot 2a = 0, \quad V_B \cdot 2 - 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 0, \\ V_B = 30 \text{ кН.}$$

Запишем проекции всех сил на ось y , приложенных к балкам AC и CB (рис. 3.34, б):

$$\sum F_{iy} = 0, \quad -V_A - F_1 + V_B = 0, \quad V_A = -F_1 + V_B = -10 + 30 = 20 \text{ кН.}$$

Вычислим силы давления на шарнир C . Выделим стержни AC и CB . При этом силы x_C и y_C шарнира C , действующие на стержень CB , направлены противоположно силам x'_C и y'_C , действующим на стержень AC ; по модулю они равны (рис. 3.35).

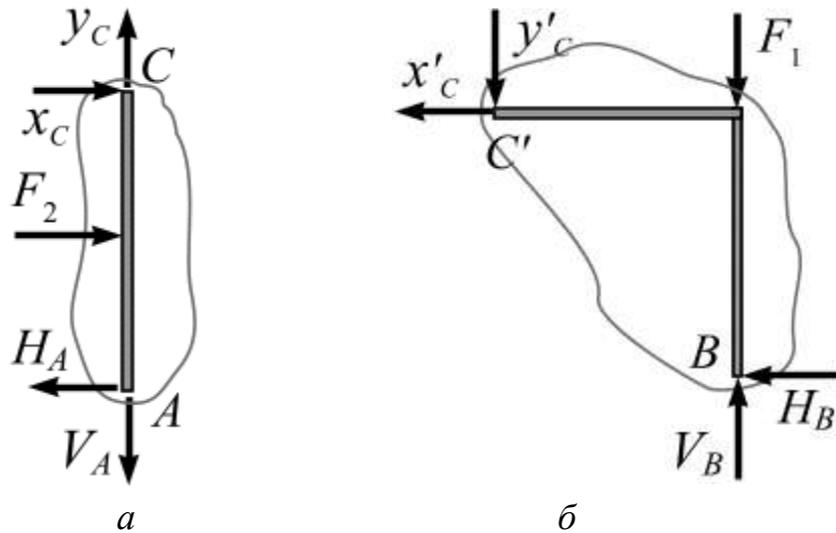


Рис. 3.35

Запишем проекции всех сил на ось x для балки AC (рис. 3.35, а):

$$\sum F_{ix} = 0, \quad x_C + F_2 - H_A = 0, \quad x_C + 20 - 10 = 0, \quad x_C = 10 \text{ кН.}$$

Запишем проекции всех сил на ось y для балки AC (рис. 3.35, а):

$$\sum F_{iy} = 0, \quad y_C - V_A = 0, \quad y_C - 20 = 0, \quad y_C = 20 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum M_{Bi} = 0, \quad V_A \cdot 2a - F_2 \cdot 2a = 20 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 0.$

Ответ: $H_A = 10 \text{ кН}, \quad V_A = 20 \text{ кН}; \quad H_B = 10 \text{ кН}, \quad V_B = 30 \text{ кН};$
 $x_C = 10 \text{ кН}, \quad y_C = 20 \text{ кН}.$

Пример 3.8. Задана составная конструкция (рис. 3.36).

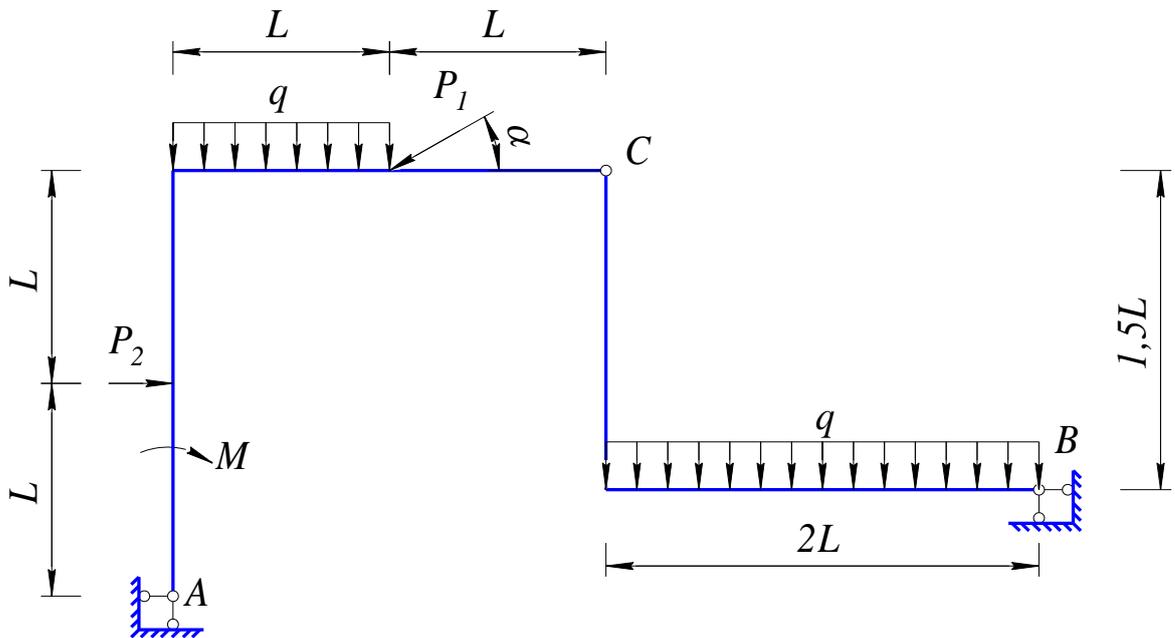


Рис. 3.36

Дано: $P_1 = 10 \text{ кН}; P_2 = 21 \text{ кН}; M = 9 \text{ кНм}; q = 5 \text{ кН/м}; L = 2 \text{ м}; \alpha = 30^\circ.$

Требуется: реакции внешних наложенных связей (H_A, V_A, H_B, V_B), реакции внутреннего шарнира (H_C, V_C).

Решение. Для вычисления реакций опор используем метод сечения, отбросим опоры в точках A и B и заменим их действие реакциями (H_A, V_A, H_B, V_B) (рис. 3.37).

Распределенную нагрузку заменим сосредоточенными силами:

$$Q_1 = 2qL = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_2 = qL = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН}.$$

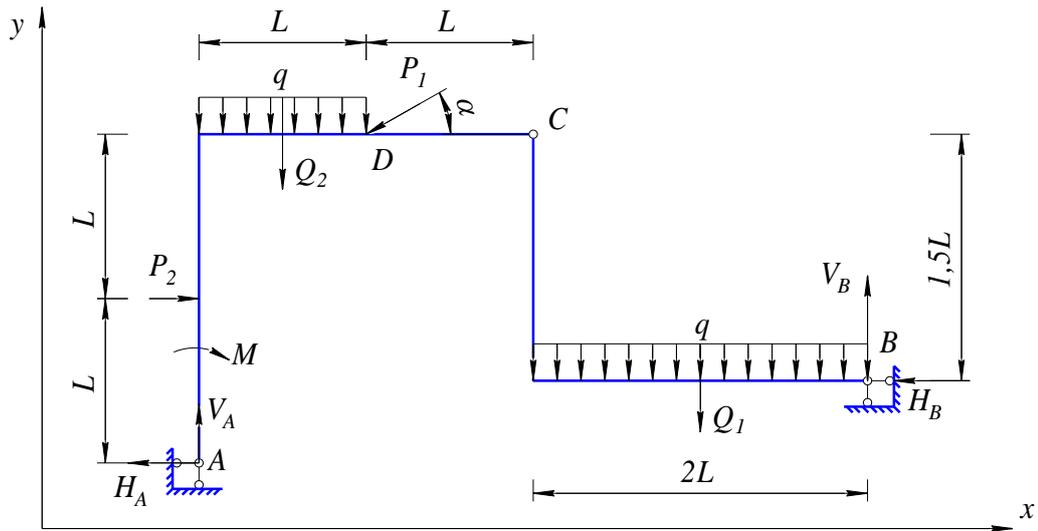


Рис. 3.37

Рассекаем конструкцию сечением по внутреннему шарниру C на две части. Что позволяет рассмотреть отдельно части AC' и CB , при этом действия отброшенных частей заменяется реакциями шарнира C (рис. 3.38).

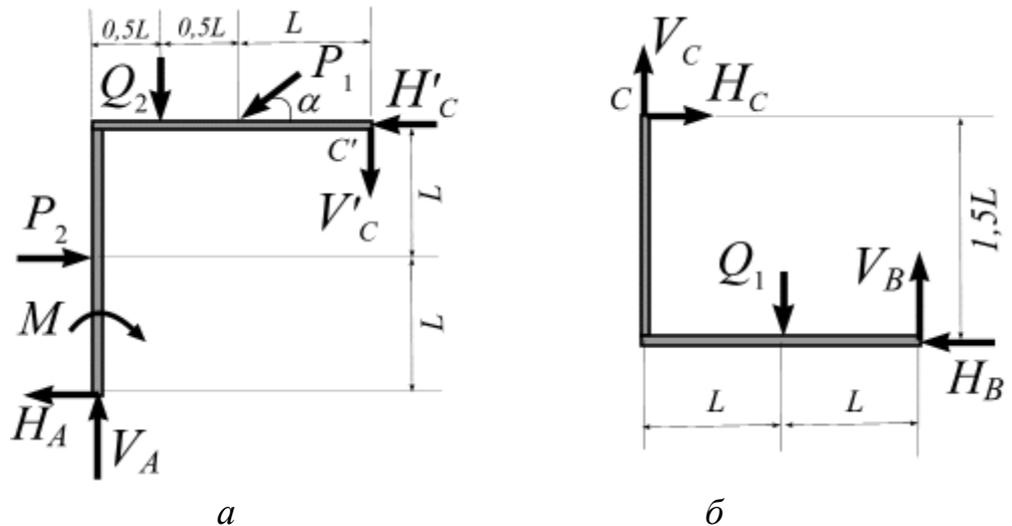


Рис. 3.38

Рассматривая всю конструкцию в целом (рис 3.37) и её правую часть (рис. 3.38, б), можем составить шесть не зависимых между собой уравнений равновесия:

$$\begin{cases} 1) \sum M_{Ci}^{\text{прав.}} = 0 \rightarrow f_1(H_B, V_B); \\ 2) \sum M_{Ai} = 0 \rightarrow f_2(V_B; H_B), \end{cases} \Rightarrow \text{вычисляем } H_B, V_B.$$

$$1) \Sigma M_{Ci}^{\text{прав.}} = -Q_1 L + V_B 2L - H_B 1,5L = 0;$$

$$2) \Sigma M_{Ai} = -M - P_2 L - Q_2 \frac{1}{2} L - P_1 \sin \alpha \cdot L + P_1 \cos \alpha 2L - Q_1 3L + \\ + V_B 4L + H_B \frac{1}{2} L = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3) \Sigma F_{ix} = 0 \rightarrow f_3(H_A; H_B) \Rightarrow \text{вычисляем } H_A; \\ 4) \Sigma F_{iy} = 0 \rightarrow f_4(V_A; V_B); \Rightarrow \text{вычисляем } V_A. \end{array} \right.$$

$$3) \Sigma F_{ix} = -H_A + P_2 - P_1 \cos \alpha - H_B = 0;$$

$$4) \Sigma F_{iy} = V_A - Q_2 - P_1 \sin \alpha - Q_1 + V_B = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5) \Sigma F_{ix}^{\text{прав.}} = 0 \rightarrow f_5(H_C; H_B); \\ 6) \Sigma F_{iy}^{\text{прав.}} = 0 \rightarrow f_6(V_C; V_B). \end{array} \right.$$

$$5) \Sigma F_{ix}^{\text{прав.}} = H_C - H_B = 0;$$

$$6) \Sigma F_{iy}^{\text{прав.}} = V_C - Q_1 + V_B = 0.$$

Решаем уравнения:

из 1) и 2) получим

$$H_B = \frac{V_B 2L - Q_1 L}{1,5L} = \frac{4}{3} V_B - \frac{2}{3} Q_1;$$

$$V_B = \frac{M + P_2 L + 0,5Q_2 L + P_1 L(\sin \alpha - 2 \cos \alpha) + 3Q_1 L - 0,5H_B L}{4L} =$$

$$= \frac{M + P_2 L + 0,5Q_2 L + P_1 L(\sin \alpha - 2 \cos \alpha) + 3Q_1 L - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} V_B - \frac{2}{3} Q_1 \right) L}{4L},$$

или

$$\frac{7}{6} V_B = \frac{M + P_2 L + 0,5Q_2 L + P_1 L(\sin \alpha - 2 \cos \alpha) + \frac{10}{3} Q_1 L}{4L}$$

и, окончательно, для V_B и H_B :

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{M + P_2L + 0,5Q_2L + P_1L(\sin \alpha - 2\cos \alpha) + \frac{10}{3}Q_1L}{4L} \cdot \frac{6}{7} = \\ &= \frac{9 + 21 \cdot 2 + 0,5 \cdot 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{10}{3} \cdot 20 \cdot 2}{4 \cdot 2} \cdot \frac{6}{7} = \\ &= \frac{613 - 60\sqrt{3}}{28} = 18,181 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_B &= \frac{V_B 2L - Q_1L}{1,5L} = \frac{4}{3}V_B - \frac{2}{3}Q_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{613 - 60\sqrt{3}}{28} - \frac{2}{3} \cdot 20 = \\ &= \frac{111 - 20\sqrt{3}}{7} = 10,908 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Из 3) и 4) получим

$$\begin{aligned} H_A &= P_2 - P_1 \cos \alpha - H_B = 21 - 10\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{111 - 20\sqrt{3}}{7} = \\ &= \frac{36 - 15\sqrt{3}}{7} = 1,431 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_A &= Q_2 + P_1 \sin \alpha + Q_1 - V_B = 10 + 10\frac{1}{2} + 20 - \frac{613 - 60\sqrt{3}}{28} = \\ &= \frac{367 + 60\sqrt{3}}{28} = 16,819 \text{ кН}, \end{aligned}$$

из 5) и 6)

$$H_C = H_B = 10,908 \text{ кН};$$

$$V_C = Q_1 - V_B = 20 - 18,181 = 1,819 \text{ кН}.$$

Проверка. Уравнение проверки составим для всей конструкции в целом:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{Di} &= -V_A L - H_A 2L - M + P_2 L + Q_2 \frac{1}{2} L - Q_1 2L + V_B 3L - H_B 1,5L = \\ &= -16,819 \cdot 2 - 1,431 \cdot 2 \cdot 2 - 9 + 21 \cdot 2 + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 2 + 18,181 \cdot 3 \cdot 2 - \\ &- 10,908 \cdot 1,5 \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Ответ: $H_A=1,43$ кН, $V_A=16,82$ кН, $H_B=10,91$ кН, $V_B=18,18$ кН,
 $H_C=10,91$, $V_C=1,82$ кН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Общие указания по выполнению и оформлению контрольных работ.

Перечень задач, входящих в контрольные работы, приведён в таблице. Студенты всех специальностей выполняют контрольные работы по каждому модулю. Каждый студент заочного отделения обязан защитить контрольные работы и получить допуск к экзамену.

Таблица

Модули	Контрольные работы	Задачи
Модуль I	№ 1	1, 2, 3*.
	№ 2	1, 2.
Модуль II	№ 3	1, 2, 3.

Примечание: задачи и задания, отмеченные звездочкой (*), студенты ускоренной формы обучения не выполняют.

Теоретическая механика – одна из дисциплин, где изучение каждой темы должно обязательно сопровождаться самостоятельным решением студентом ряда задач. Очень важным при изучении курса является *систематическое последовательное изучение предмета*.

Для этого необходимо:

1. Написать краткий конспект каждой лекции из [1] чтобы к концу изучения иметь краткий курс лекций по теоретической механике.
2. Для закрепления пройденной темы необходимо решить ряд задач, рекомендованных для самостоятельной работы [3] – это способствует лучшему пониманию и усвоению пройденного материала.

По модулям 1 и 2 каждый студент выполняет три контрольные работы. При этом:

- не следует приступать к выполнению задания, не изучив теорию соответствующей темы;
- каждая контрольная работа выполняется на белой бумаге формата А4 (297×420 мм) с полями 20 мм слева и 5 мм с других сторон, листы задания

должны быть подшиты по центру с левой стороны, титульный лист оформляется согласно рис. 1.

Контрольную работу необходимо оформить аккуратно, с выполнением правил и требований строительного черчения и с использованием чертежных инструментов.

Исходные численные данные к задачам студент выбирает самостоятельно из таблиц, которые прилагаются к каждой задаче.

Исходные данные для индивидуальных заданий на контрольные работы студент должен взять из приводимых далее таблиц в строгом соответствии со своим личным номером (номер зачетной книжки). Для этого необходимо выписать номер зачетной книжки и под последними шестью цифрами подписать буквы: *a*, *b*, *v*, *z*, *d*, *e*.

Пример. При номере 0305 107:

0	3	0	5	1	0	7
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>v</i>	<i>z</i>	<i>d</i>	<i>e</i>

Перед решением задачи индивидуального задания необходимо выписать для заданного варианта полное условие с числовыми данными, написать текст задания, составить аккуратный чертеж с соблюдением масштаба и показать на нем все размеры в числах.

Каждый этап решения задач должен быть озаглавлен.

При выполнении расчетов сначала записывается формула, затем в нее подставляются исходные данные в размерности международной системы (СИ) и подсчитывается результат. Например:

$$M_A = 3F_1 \cdot a + 4F_2 \cdot b = 3 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot 7 = 198 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$$

$$\text{(здесь } F_1 = 5 \text{ Н, } a = 2 \text{ м, } F_2 = 6 \text{ Н, } b = 7 \text{ м).}$$

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых должны быть показаны все размеры в числах. Необходимо указывать единицы измерения (размерность) всех полученных результатов. Задание, выполненное небрежно, без соблюдения всех перечисленных требований, не принимается.

Сдача и защита контрольных работ производится во время сессии, в сроки, установленные графиком учебного процесса, в следующем порядке:

- преподаватель проверяет готовые задания, указывает на ошибки, если они имеются, и задает несколько вопросов по теме выполненного задания;
- для защиты задания студенту дается задача по этой теме в виде контрольной работы;
- задание не засчитывается, если студент не смог решить задачу. Только после дополнительного изучения темы он может повторно защитить задание.

Типовые задачи для защиты представлены в [3].

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет
Инженерно строительный институт

Контрольная работа №
по теоретической механике
тема задания _____

Выполнил(а) студент (ка) _____ гр.

Ф. И. О. _____

Проверил _____

« ____ » _____ 201 г.

Красноярск

201 г.

Рис. 1

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Задача 1. Кинематика точки на плоскости

Точка движется в плоскости oxy . Уравнение движения точки задано координатами: $x = x(t)$, $y = y(t)$, где x и y в сантиметрах, t – в секундах. Уравнение $y = y(t)$ дано в табл.1 – номер варианта соответствует сумме трёх последних цифр номера зачетной книжки ($z+d+e$). Уравнение $x = x(t)$ дано в табл.2, где номер столбца выбирается в соответствии с номером варианта, а номер строки соответствует последней цифре номера зачетной книжки (e).

Требуется:

- записать уравнение траектории в декартовой системе координат:
 $y = y(x)$;
- построить траекторию;
- определить положение точки на траектории в начальный момент времени $t = 0$ с, направление движения точки по траектории, положение точки на траектории через $t = 1$ с;
- вычислить вектор скорости \vec{v} и вектор ускорения \vec{a} точки для $t = 0$ и $t = 1$ (с);
- задать движение точки естественным способом: $s = s(t)$;
- вычислить нормальную и касательную составляющие ускорения точки для $t = 0$ и $t = 1$ (с) геометрически и аналитически;
- вычислить радиус кривизны для $t = 0$ и $t = 1$ (с);

Функциональные зависимости $y = y(t)$, $x = x(t)$ заданы в таблицах

2.1 (а) и 2.2 (б) соответственно.

Для выполнения и защиты данной задачи необходимо усвоить пункты 1, 2 модуля 1 рабочей программы.

Таблица 1

№ вариан- та	$y = y(t)$	№ вариан- та	$y = y(t)$
1	$y = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	13	$y = (2+t)^2$
2	$y = 4 - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	14	$y = 2(t+4)^2$
3	$y = -3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	15	$y = 2 + (t+4)^2$
4	$y = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$	16	$y = 2 - 3t^2$
5	$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2$	17	$y = 4 + 2t^2$
6	$y = -4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	18	$y = (t+1)^2 - 2$
7	$y = 2 - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	19	$y = (2-t)^2 + 1$
8	$y = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	20	$y = 4(t-1)^2 + 3$
9	$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 1$	21	$y = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$
10	$y = 3 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	22	$y = 2 - 3\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
11	$y = 2t^2$	23	$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 2$
12	$y = 3(t+2)^2 + 1$	24	$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$

Окончание табл. 1

25	$y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2$	27	$y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$
26	$y = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	0	$y = 1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

Таблица 2

№ строки	$x = x(t)$		
	Для вариантов 1–10	Для вариантов 11–20	Для вариантов 21–27, 0
1	$x = 2 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$x = 2 - t$	$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$
2	$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$	$x = 2t$	$x = 4 - \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$x = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$	$x = t - 4$	$x = \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$
4	$x = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 1$	$x = 4 - 2t$	$x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$
5	$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$	$x = 4 - t$	$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$
6	$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 2$	$x = 2t + 2$	$x = \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2$
7	$x = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$x = t - 1$	$x = 4 + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
8	$x = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 2$	$x = 2 + t$	$x = \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$

Окончание табл. 2

9	$x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$	$x = 3t + 1$	$x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1$
0	$x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$x = t - 3$	$x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 1$

Задача 2. Вычисление кинематических характеристик точек при поступательном и вращательном движениях твердого тела

Механизм состоит из трех ступенчатых дисков (1–3), находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нерастяжимой нити, намотанной на одно из колес. Радиусы ступенчатых дисков заданы. На ободах колес расположены точки А, В, С. В столбце «Дано» (таблица 3) задано уравнение движения одного из звеньев механизма. Номер варианта соответствует сумме трёх последних цифр номера зачетной книжки ($z+d+e$).

Вычислить в момент времени $t_1 = 2$ (с) указанные в столбце «Вычислить» (таблица 3) скорости (v – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек и тел.

Расчетные схемы представлены в таблице 4, где номер рисунка соответствует номеру варианта ($z+d+e$). Для выполнения и защиты данной задачи необходимо усвоить пункты 3, 4, 5 модуля 1 рабочей программы.

Таблица 3

№ варианта	Дано	Вычислить	
		скорости	ускорения
1	2	3	4
1	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_C, v_B, ω_3	$a_B, \varepsilon_1, \varepsilon_2$
2	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_B, v_C, ω_1	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

Продолжение табл. 3

3	$\varphi_1 = 2t^2 - 9t$	$\upsilon_A, \omega_2, \omega_3$	$a_C, \varepsilon_1, \varepsilon_2$
4	$\omega_2 = (7t - 3t^2)$	$\upsilon_A, \upsilon_C, \omega_1$	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
5	$\varphi_2 = 3t - t^2$	$\upsilon_5, \upsilon_B, \omega_3$	$a_B, \varepsilon_1, \varepsilon_2$
6	$\omega_1 = 5t - 2t^2 $	$\upsilon_4, \omega_2, \omega_3$	$a_A, \varepsilon_1, \varepsilon_2$
7	$\varphi_3 = 2(t^2 - 6)$	$\upsilon_4, \upsilon_5, \omega_1$	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
8	$\upsilon_4 = 3t^2 - 1$	$\upsilon_A, \upsilon_C, \omega_2$	$a_B, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
9	$s_5 = 2t^2 - 5t$	$\upsilon_B, \upsilon_C, \omega_1$	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
10	$\omega_3 = (8t - 3t^2)$	$\upsilon_A, \upsilon_B, \upsilon_C$	$a_B, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
11	$s_4 = 2(3t^2 - t)$	$\upsilon_A, \upsilon_C, \omega_3$	$a_B, \varepsilon_1, \varepsilon_2$
12	$\upsilon_5 = 4(1 - t^2)$	$\upsilon_C, \omega_1, \omega_2$	$a_A, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
13	$\varphi_1 = 2t^2 - 6t$	$\upsilon_B, \upsilon_C, \omega_2$	$a_C, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
14	$\omega_1 = (2t^2 - t)$	$\upsilon_C, \upsilon_B, \omega_2$	$a_B, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
15	$\varphi_2 = 4t^2 - t$	$\upsilon_A, \upsilon_B, \omega_1$	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
16	$\omega_2 = (t^2 - 8t)$	$\upsilon_A, \upsilon_B, \omega_3$	$a_C, \varepsilon_1, \varepsilon_2$
17	$\varphi_3 = 3t^2 + t$	$\upsilon_A, \upsilon_C, \omega_1$	$a_B, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
18	$\omega_3 = (t^2 - 3t)$	$\upsilon_A, \upsilon_C, \omega_2$	$a_B, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
19	$s_4 = 3t^2 - t$	$\upsilon_B, \upsilon_C, \omega_2$	$a_A, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
20	$\upsilon_4 = 5t - t^2$	$\upsilon_B, \upsilon_C, \omega_2$	$a_A, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
21	$s_5 = 6t - t^2$	$\upsilon_A, \upsilon_B, \omega_1$	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
22	$\upsilon_5 = 3t^2 - 1$	$\upsilon_A, \upsilon_B, \omega_1$	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

Окончание табл. 3

23	$\varphi_1 = 4t^2 - 2t$	v_C, v_B, ω_2	$a_A, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
24	$\omega_1 = 8t^2 - t$	v_C, v_B, ω_2	$a_A, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
25	$\varphi_2 = 3t^2 + 3$	v_A, v_B, ω_2	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
26	$\varphi_1 = 2t^2 - 3t$	v_B, v_A, ω_3	$a_A, \varepsilon_1, \varepsilon_3$
27	$s_5 = t - 4t^2$	v_A, v_B, ω_1	$a_C, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
0	$\varphi_2 = 4t^2 - 3t$	v_5, v_A, ω_3	$a_B, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

Таблица 4

1		$R_1 = 8 \text{ см};$ $R_2 = 16 \text{ см};$ $R_3 = 4 \text{ см};$ $r_1 = 6 \text{ см};$ $r_2 = 3 \text{ см};$ $r_3 = 2 \text{ см}$
2		$R_1 = 8 \text{ см};$ $R_2 = 16 \text{ см};$ $R_3 = 12 \text{ см};$ $r_1 = 6 \text{ см};$ $r_2 = 9 \text{ см};$ $r_3 = 9 \text{ см}$

Продолжение табл. 4

3		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 12 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 6 \text{ см};$ $r_3 = 6 \text{ см}$
4		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 16 \text{ см};$ $R_3 = 18 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 14 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
5		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 9 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 4 \text{ см};$ $r_3 = 5 \text{ см}$
6		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 9 \text{ см};$ $R_3 = 14 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 6 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$

Продолжение табл. 4

7		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 10 \text{ см};$ $R_3 = 16 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 6 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
8		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 12 \text{ см};$ $R_3 = 18 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 8 \text{ см};$ $r_3 = 12 \text{ см}$
9		$R_1 = 5 \text{ см};$ $R_2 = 10 \text{ см};$ $R_3 = 14 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 5 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
10		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 10 \text{ см};$ $R_3 = 18 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 6 \text{ см};$ $r_3 = 12 \text{ см}$

Продолжение табл. 4

11		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 6 \text{ см};$ $R_3 = 14 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 3 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
12		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 16 \text{ см};$ $r_1 = 4 \text{ см};$ $r_2 = 3 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
13		$R_1 = 10 \text{ см};$ $R_2 = 12 \text{ см};$ $R_3 = 16 \text{ см};$ $r_1 = 8 \text{ см};$ $r_2 = 9 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
14		$R_1 = 8 \text{ см};$ $R_2 = 12 \text{ см};$ $R_3 = 18 \text{ см};$ $r_1 = 6 \text{ см};$ $r_2 = 8 \text{ см};$ $r_3 = 12 \text{ см}$

Продолжение табл. 4

15		$R_1 = 3 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 14 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 4 \text{ см};$
16		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 10 \text{ см};$ $R_3 = 20 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 8 \text{ см}$
17		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 14 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 2 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
18		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 16 \text{ см};$ $r_2 = 4 \text{ см};$ $r_3 = 8 \text{ см}$

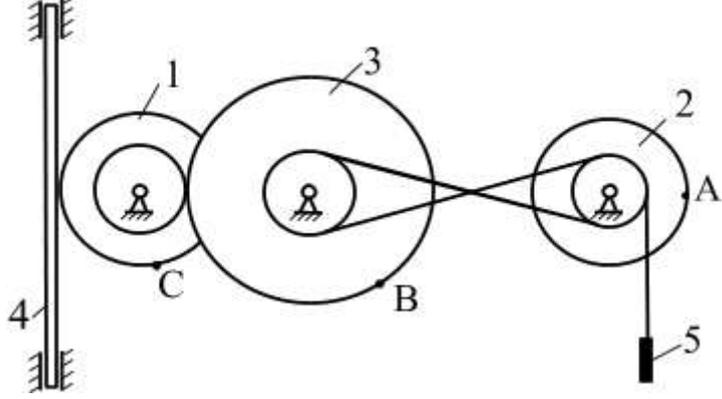
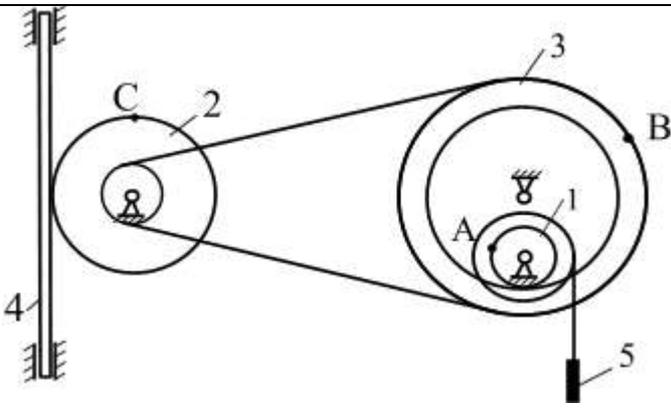
Продолжение табл. 4

19		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 7 \text{ см};$ $R_3 = 14 \text{ см};$ $r_1 = 4 \text{ см};$ $r_2 = 6 \text{ см}$
20		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 14 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 2 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
21		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 10 \text{ см};$ $R_3 = 18 \text{ см};$ $r_1 = 4 \text{ см};$ $r_2 = 6 \text{ см};$ $r_3 = 16 \text{ см}$
22		$R_1 = 5 \text{ см};$ $R_2 = 7 \text{ см};$ $R_3 = 16 \text{ см};$ $r_1 = 4 \text{ см};$ $r_2 = 5 \text{ см};$ $r_3 = 12 \text{ см}$

Продолжение табл. 4

23		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 16 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 4 \text{ см};$ $r_3 = 14 \text{ см}$
24		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 12 \text{ см};$ $r_1 = 4 \text{ см};$ $r_2 = 5 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$
25		$R_1 = 6 \text{ см};$ $R_2 = 12 \text{ см};$ $R_3 = 16 \text{ см};$ $r_1 = 5 \text{ см};$ $r_2 = 10 \text{ см}$
26		$R_1 = 3 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 12 \text{ см};$ $r_1 = 2 \text{ см};$ $r_2 = 4 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}$

Окончание табл. 4

27		$R_1 = 7 \text{ см};$ $R_2 = 8 \text{ см};$ $R_3 = 10 \text{ см};$ $r_1 = 5 \text{ см};$ $r_2 = 4 \text{ см};$ $r_3 = 2 \text{ см}$
0.		$R_1 = 4 \text{ см};$ $R_2 = 10 \text{ см};$ $R_3 = 20 \text{ см};$ $r_1 = 3 \text{ см};$ $r_2 = 8 \text{ см}$

Задача 3. Сложное движение точки

Пластинка вращается по заданному уравнению $\varphi = \varphi(t)$. По пластинке вдоль прямой OM (сторона квадратной пластины $a = 40 \text{ см}$) или радиусу R ($R = 40 \text{ см}$) движется точка M . Движение точки M задано уравнениями $S(t) \equiv OM(t)$. Вычислить для точки M :

- абсолютную скорость в момент времени $t = 1 \text{ с}$, показать на рисунке векторы относительной, переносной и абсолютной скоростей;
- абсолютное ускорение в момент времени $t = 1 \text{ с}$, показать на рисунке направление векторов относительного, переносного ускорений, а также ускорения Кориолиса.

Функциональные зависимости $\varphi = \varphi(t)$ в радианах заданы в таблице 5, фигурные пластинки и уравнение движения точки $OM = OM(t)$ в сантиметрах заданы в таблице 6.

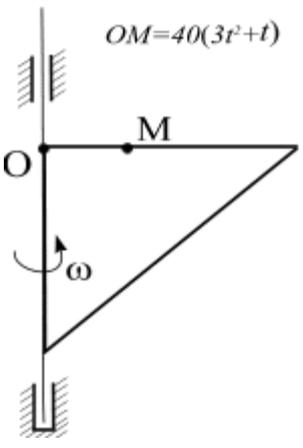
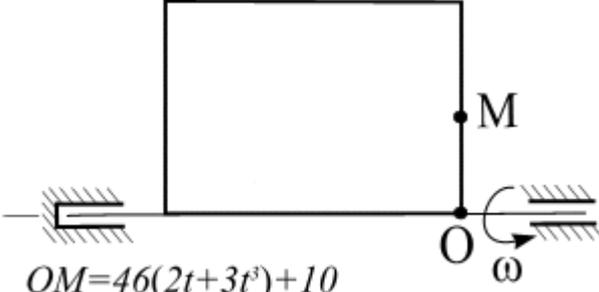
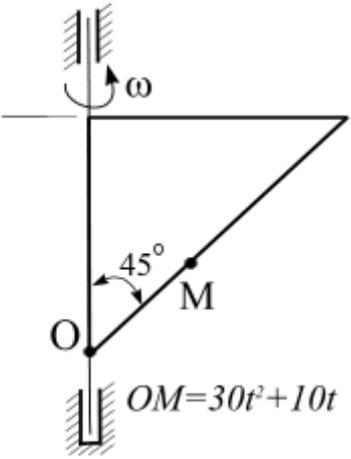
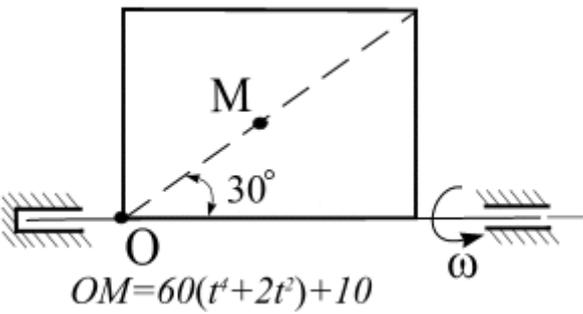
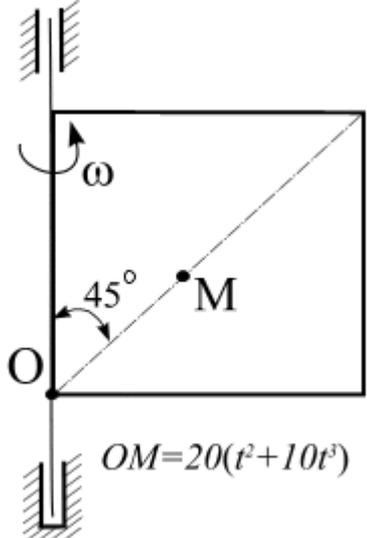
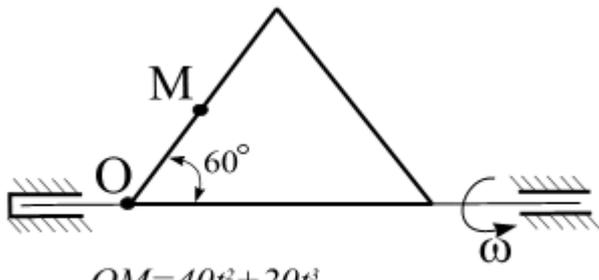
Номер варианта в табл. 5 и номер рисунка в табл. 6 соответствуют сумме последних трёх цифр номера зачетной книжки ($e+d+e$).

Для выполнения и защиты данной задачи необходимо усвоить пункт 6 рабочей программы.

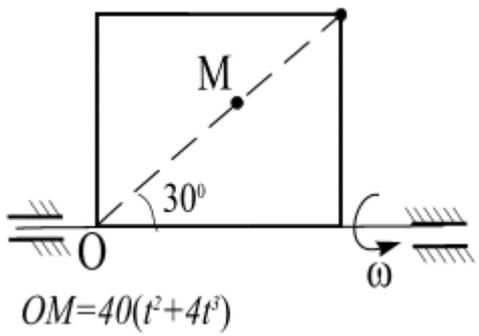
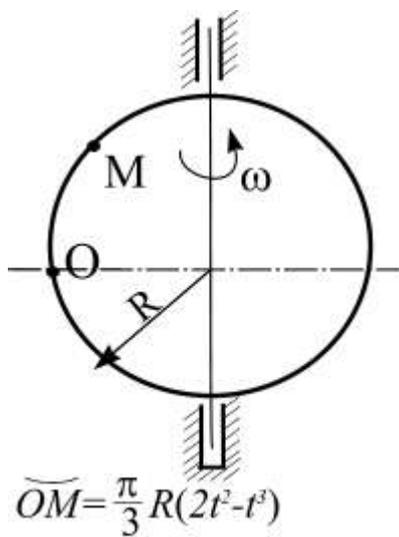
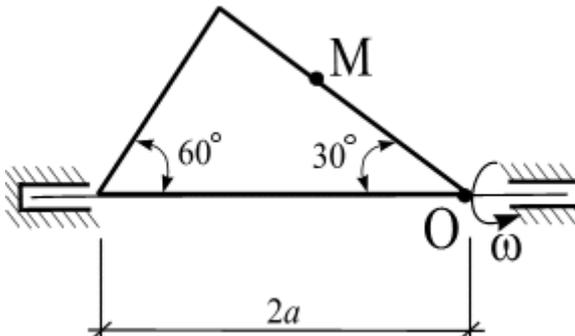
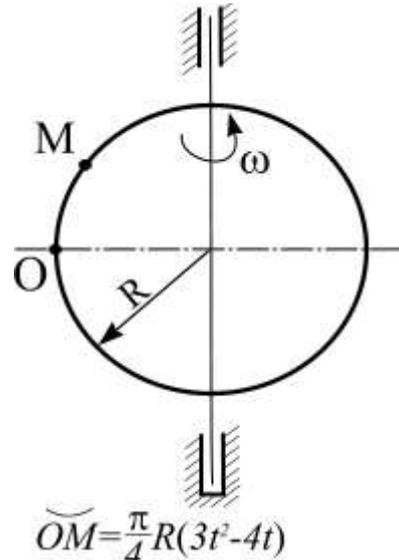
Таблица 5

№ варианта	$\varphi = \varphi(t)$	№ варианта	$\varphi = \varphi(t)$
1	$4(t^2 - t)$	15	$2(t^2 - t)$
2	$3t^2 - 8t$	16	$10t^2 - 5t^3$
3	$6t^2 - 4t$	17	$6t^2 - 3t^3$
4	$t^2 - 2t^3$	18	$2t^3 - 11t^2$
5	$2(t^2 - t)$	19	$15t - 3t^2$
6	$5t - 4t^2$	20	$5t - 4t^3$
7	$3(t^2 - t^3)$	21	$2(t^3 - t^2)$
8	$8(t^3 - t^2)$	22	$10t^2 - 5t^3$
9	$4(t^2 - t)$	23	$t^3 - 2t^2$
10	$t^2 - 4t$	24	$3t^3 - 12t^2$
11	$2(t^3 - t^2)$	25	$3t^2 - 8t$
12	$15(t - 3t^2)$	26	$4(t^2 - t)$
13	$6t^2 - 3t^3$	27	$3t^2 - 6t^3$
14	$2t^2 - 11t$	0	$11t^2 - 3t^3$

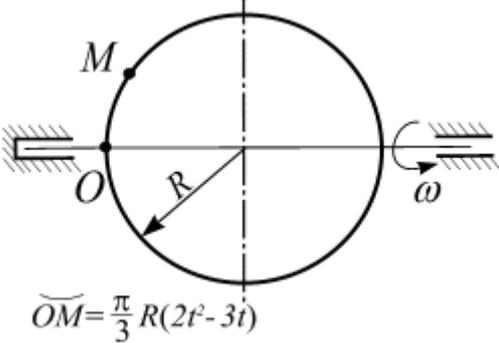
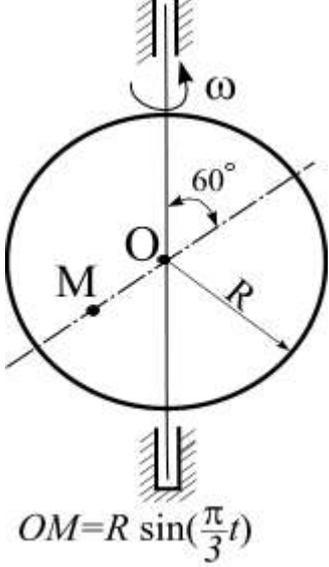
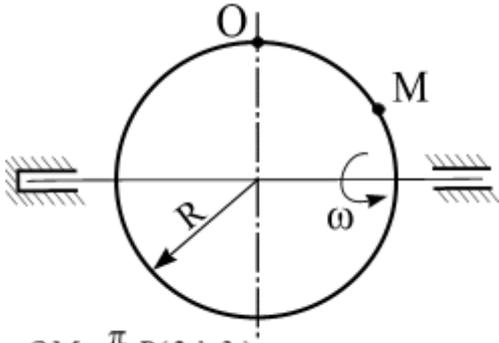
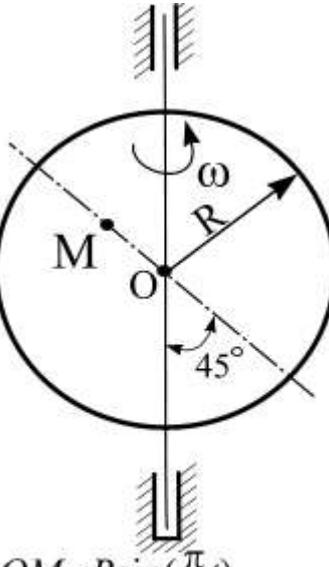
Таблица 6

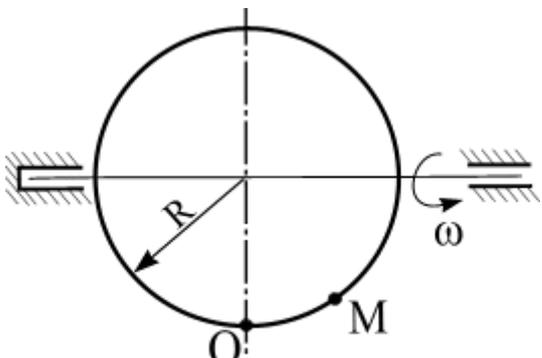
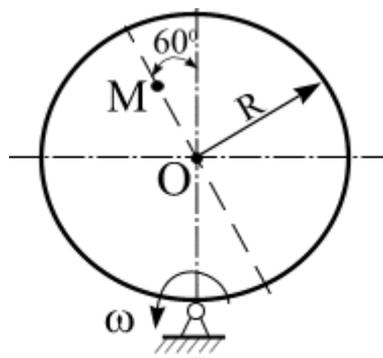
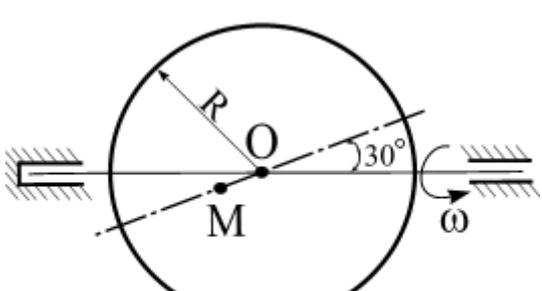
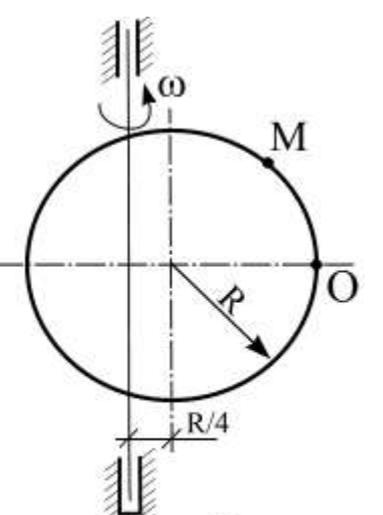
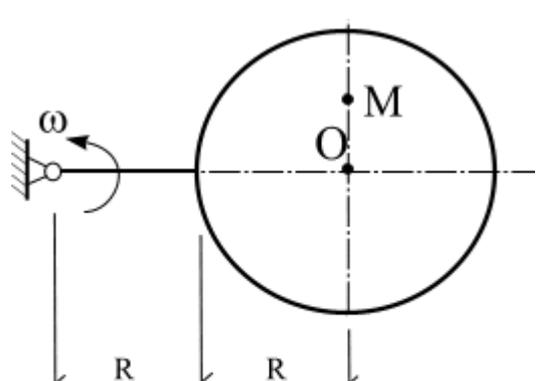
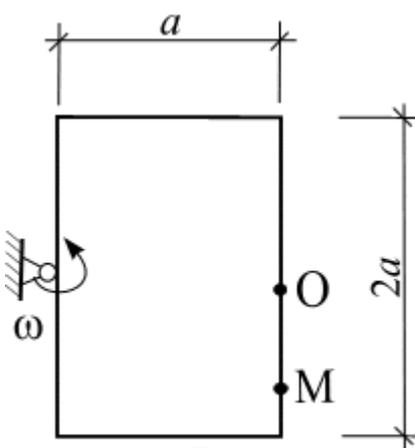
<p>1</p>  <p>$OM = 40(3t^2 + t)$</p>	<p>2</p>  <p>$OM = 46(2t + 3t^3) + 10$</p>
<p>3</p>  <p>$OM = 30t^2 + 10t$</p>	<p>4</p>  <p>$OM = 60(t^2 + 2t^3) + 10$</p>
<p>5</p>  <p>$OM = 20(t^2 + 10t^3)$</p>	<p>6</p>  <p>$OM = 40t^2 + 20t^3$</p>

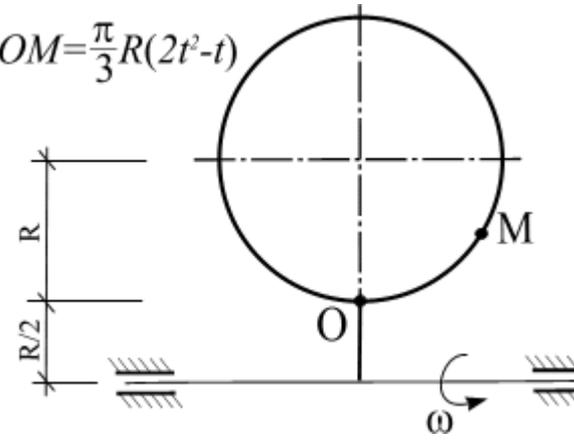
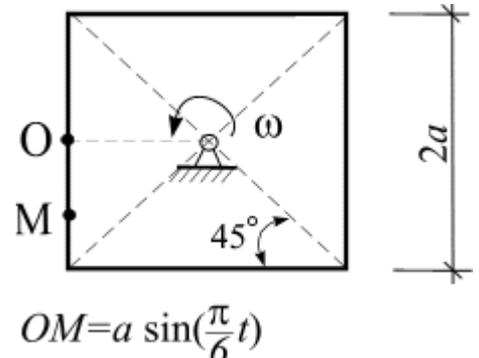
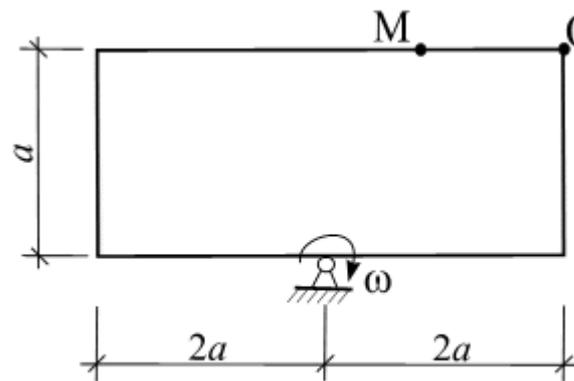
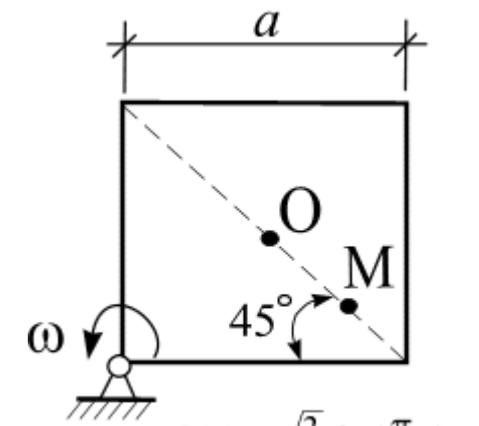
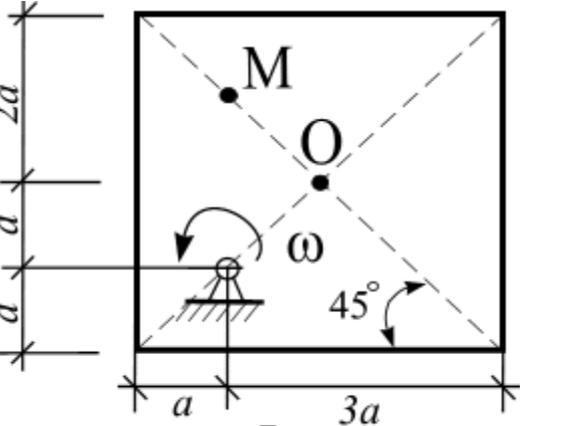
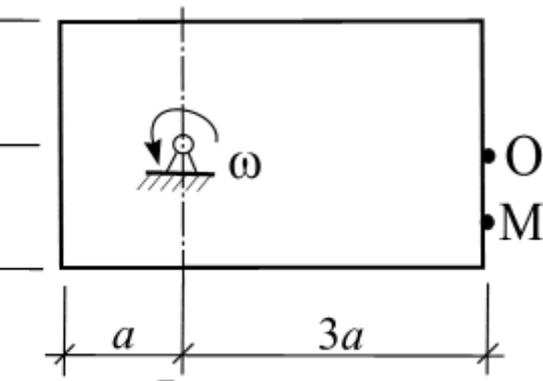
Продолжение табл. 6

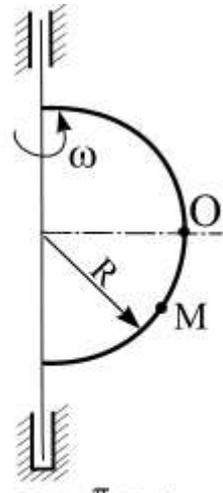
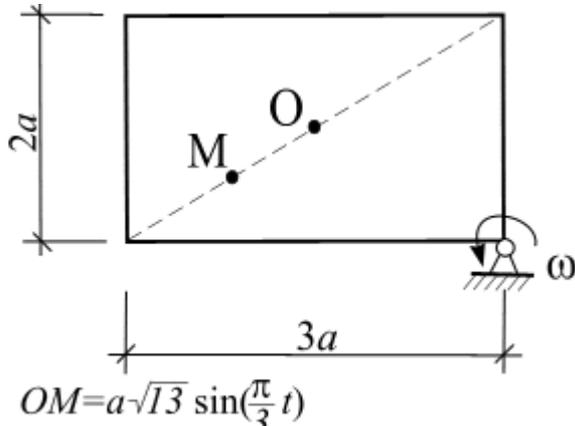
<p>7</p>  <p>$OM=40(t^2+4t^3)$</p>	<p>8</p>  <p>$\overline{OM}=\frac{\pi}{3}R(2t^2-t^3)$</p>
<p>9</p>  <p>$OM=20(2t^2-t)$</p>	<p>10</p>  <p>$\overline{OM}=\frac{\pi}{4}R(3t^2-4t)$</p>

Продолжение табл. 6

<p>11</p>  <p>$\overline{OM} = \frac{\pi}{3} R(2t^2 - 3t)$</p>	<p>12</p>  <p>$OM = R \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$</p>
<p>13</p>  <p>$OM = \frac{\pi}{6} R(2t^2 - 3t)$</p>	<p>14</p>  <p>$OM = R \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$</p>

<p>15</p>  <p>$OM = \frac{\pi}{3} R(t^3 - 2t)$</p>	<p>16</p>  <p>$OM = R \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$</p>
<p>17</p>  <p>$OM = R \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$</p>	<p>18</p>  <p>$OM = \frac{\pi}{6} R(t^3 - 3t)$</p>
<p>19</p>  <p>$OM = R \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$</p>	<p>20</p>  <p>$OM = a \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$</p>

<p>21</p> <p>$OM = \frac{\pi}{3} R (2t^2 - t)$</p> 	<p>22</p>  <p>$OM = a \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right)$</p>
<p>23</p>  <p>$OM = 2a \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$</p>	<p>24</p>  <p>$OM = a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right)$</p>
<p>25</p>  <p>$OM = 2a \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$</p>	<p>26</p>  <p>$OM = a \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right)$</p>

<p>27</p>  <p>$OM = \frac{\pi}{4} R \sin t$</p>	<p>0</p>  <p>$OM = a\sqrt{13} \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$</p>
---	--

Контрольная работа № 2. Плоское движение твердого тела

Задача 1. Кинематический анализ плоского механизма

Для заданного положения плоского механизма вычислить:

- скорости точек A, B, C ;
- ускорения точек A, B ; *
- угловую скорость звена, которому принадлежат точки A, B, C ;
- угловое ускорение звена, которому принадлежат точки A, B, C .*

Схемы механизмов показаны в табл. 8, необходимые для расчета данные приведены в табл. 7.

Примечания:

- Номер варианта в табл. 7 и номер рисунка в табл. 8 соответствуют сумме последних трёх цифр номера зачетной книжки ($z+d+e$);
- Задания, отмеченные звездочкой (*), студентами ускоренной формы обучения не выполняются.

Таблица 7

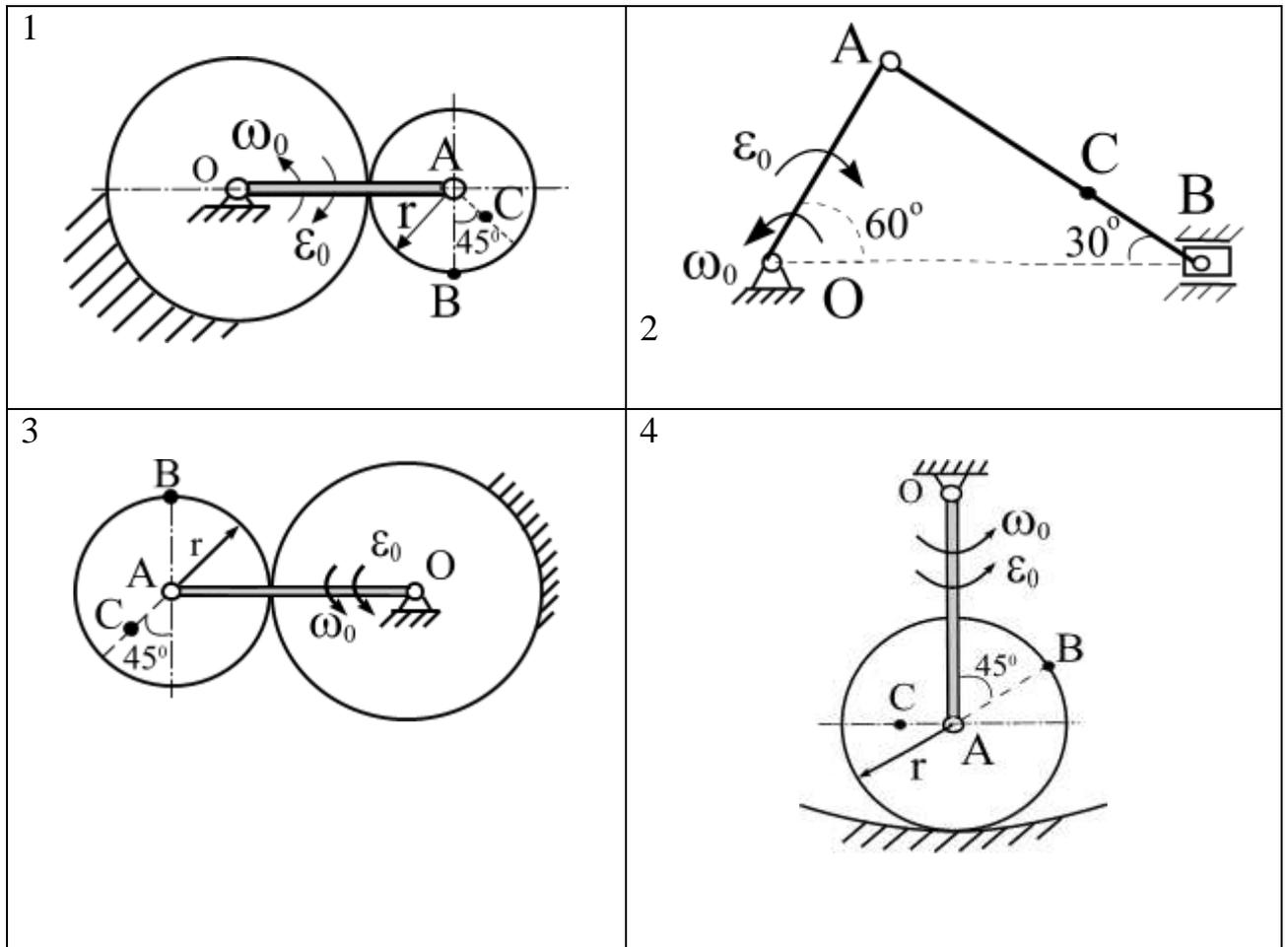
№ вари- анта	Размеры, см				$\omega_0,$ c^{-1}	$\varepsilon_0,$ c^{-2}	$V_A,$ см/с	$a_A,$ см/с ²
	OA	r	AB	AC				
1	40	15	-	8	2	2	-	-
2	35	-	-	40	4	8	-	-
3	30	15	-	8	3	2	-	-
4	40	15	-	6	1	2	-	-
5	80	-	60	20	2	1	-	-
6	40	-	-	15	5	2	-	-
7	35	-	75	60	5	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	20	10
10	-	-	30	20	-	-	10	5
11	25	-	80	20	2	3	-	-
12	-	-	30	20	-	-	20	15
13	25	-	40	10	2	4	-	-
14	45	15	-	8	3	2	-	-
15	-	30	-	10	-	-	50	80
16	40	15	-	8	1	2	-	-
17	55	30	-	20	2	3	-	-
18	20	15	-	10	1	3	-	-
19	30	-	30	20	2	3	-	-
20	40	-	60	20	3	5	-	-
21	20	15	-	10	2	1	-	-
22	-	-	20	15	-	-	10	15
23	35	-	60	40	4	8	-	-

Окончание табл. 7

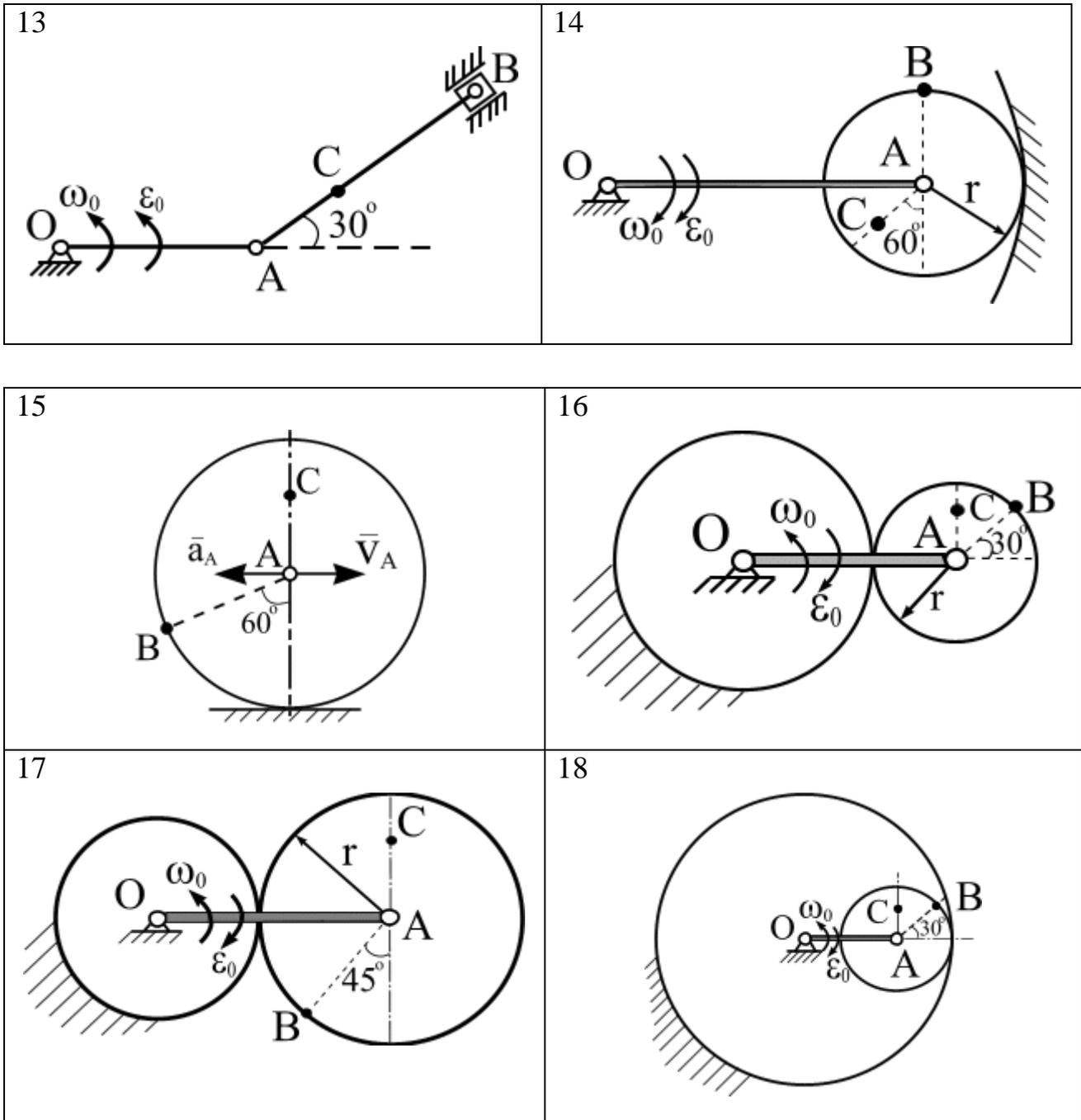
№ варианта	Размеры, см				$\omega_0,$ c^{-1}	$\varepsilon_0,$ c^{-2}	$V_A,$ см/с	$a_A,$ см/с ²
	OA	r	AB	AC				
24	-	-	60	20	-	-	5	10
25	50	-	50	20	2	2	-	-
26	25	-	35	15	2	3	-	-
27	-	15	-	5	-	-	60	30
0	20	-	50	25	2	4	-	-

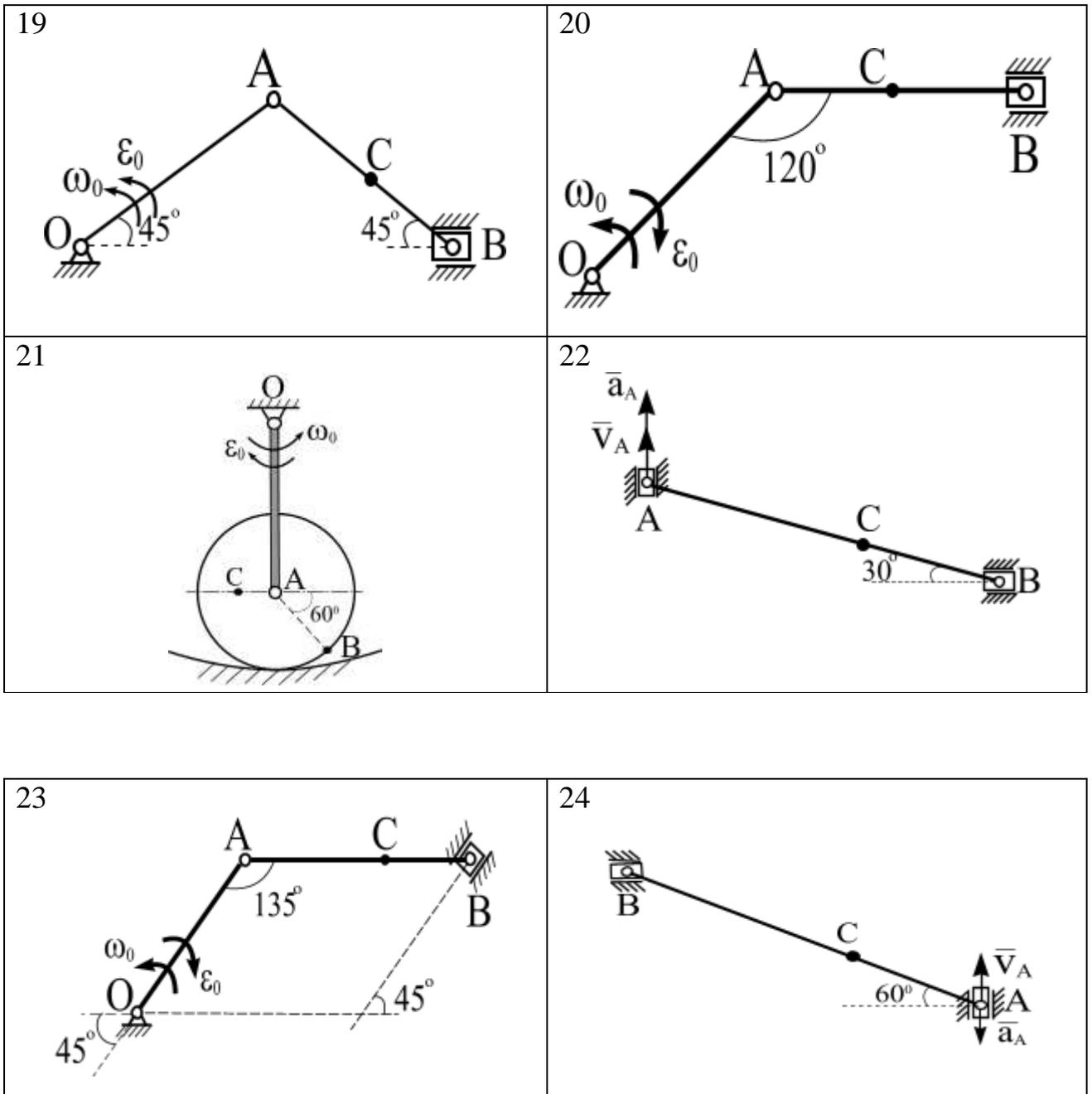
Примечание: В таблице 7 введены обозначения: V_A – скорость точки A , a_A – ускорение точки A , ω_0 – угловая скорость звена OA , ε_0 – угловое ускорение звена OA .

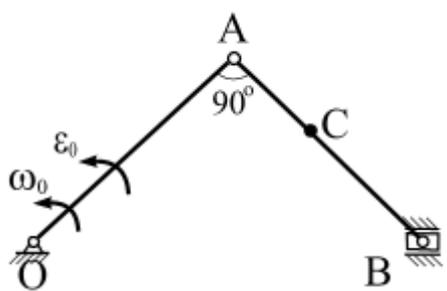
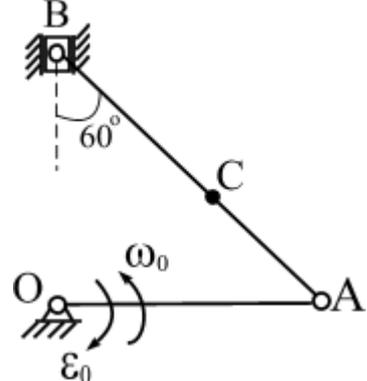
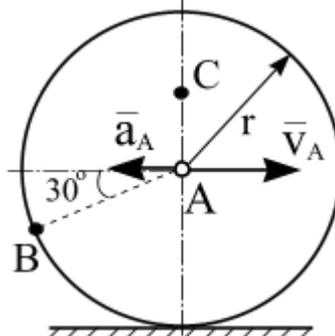
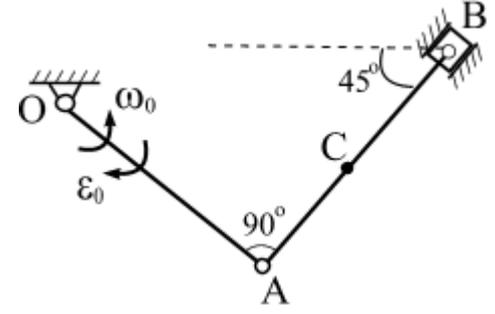
Таблица 8



<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>10</p>
<p>11</p>	<p>12</p>





<p>25</p> 	<p>26</p> 
<p>27</p> 	<p>0</p> 

Задача 2. Кинематический анализ многозвенного механизма

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2 \text{ (с}^{-1}\text{)}$.

Для заданного положения механизма:

- 1) определить скорости всех точек: A, B, C, D и т. д., используя следствия теоремы о скорости точки плоской фигуры;
- 2) определить скорости всех точек: A, B, C, D и т. д. и угловые скорости всех его звеньев с помощью мгновенного центра скоростей;
- 3) сравнить полученные результаты.

Необходимые численные данные приведены в табл. 9, схемы механизмов показаны в табл. 10.

Примечания:

Номер варианта в табл. 9 и номер рисунка в табл. 10 соответствуют сумме последних трёх цифр номера зачетной книжки ($z+d+e$).

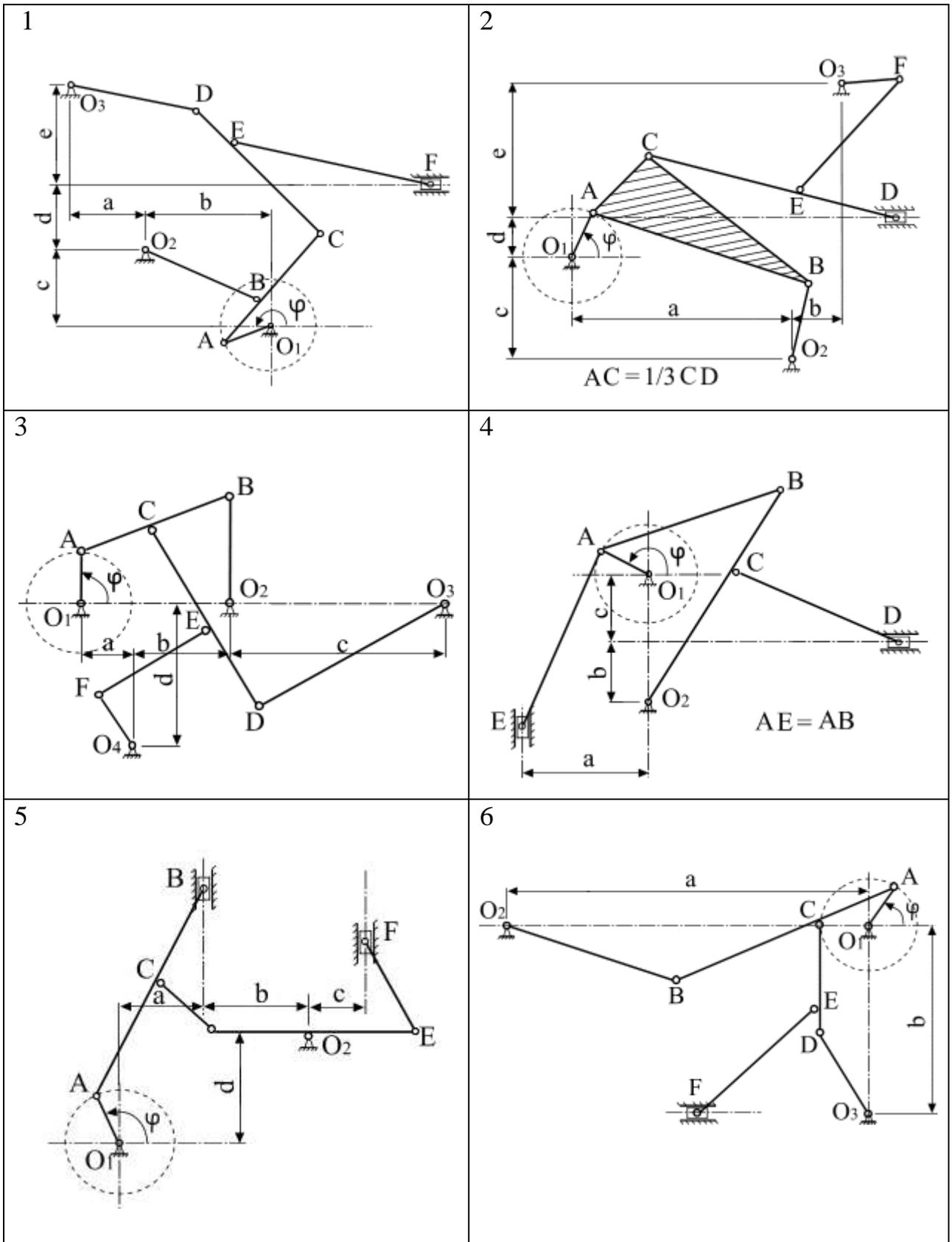
Таблица 9

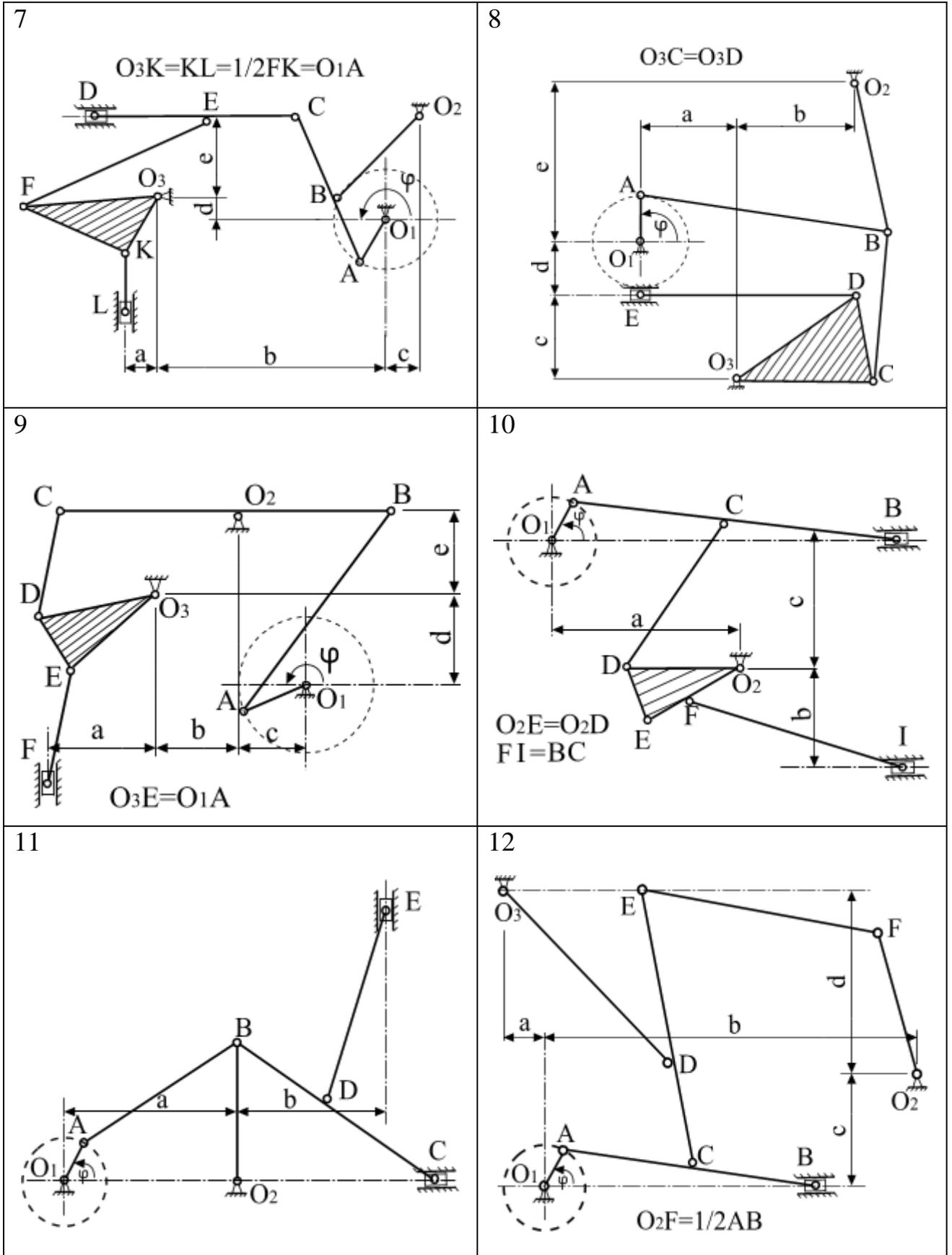
№ вари- анта	φ_0	Расстояние, см					Длина звеньев, см										
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	O_1A	O_2B	O_2D	O_3D	O_3F	<i>AB</i>	<i>BC</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DE</i>	<i>EF</i>
1	200	18	23	18	22	23	14	28	-	28	-	21	21	48	38	-	42
2	60	56	10	26	16	25	21	25	-	-	20	54	52	69	35	-	32
3	90	15	25	54	35	-	15	28	-	58	-	42	21	47	26	-	31
4	155	26	15	23	-	-	15	65	-	-	-	51	22	38	-	-	-
5	125	19	19	10	22	-	12	-	19	-	-	55	19	23	-	38	22
6	60	65	49	-	-	-	15	29	-	24	-	50	25	32	23	-	39
7	250	11	42	11	7	24	16	34	-	-	41	25	25	42	21	-	49
8	90	27	18	14	15	30	14	29	-	23	-	55	32	15	-	45	-
9	200	23	19	20	28	21	21	31	-	25	-	65	62	31	-	11	29
10	20	55	21	25	-	-	15	-	24	-	-	70	35	33	-	17	12
11	50	50	30	-	-	-	14	29	-	-	-	45	54	34	-	37	-
12	55	10	86	32	28	-	21	-	-	55	-	60	30	19	60	-	49
13	315	17	54	-	-	-	15	-	40	-	-	50	35	40	22	22	50
14	0	28	40	6	18	15	15	31	-	15	-	50	25	70	35	-	50
15	220	46	31	-	-	-	15	20	-	20	-	45	15	31	17	17	37

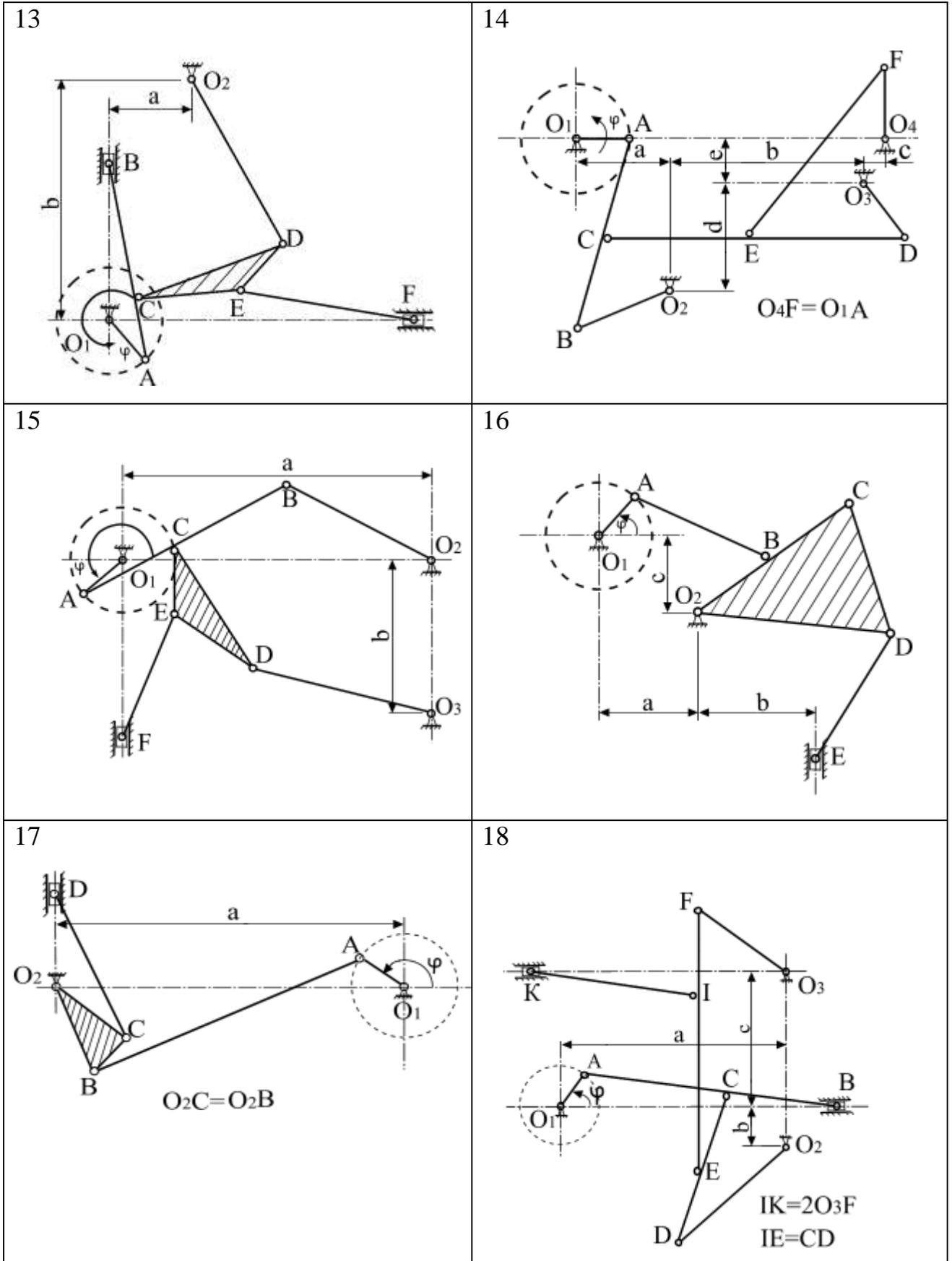
Окончание табл. 9

№ вари- анта	φ_0	Расстояние, см					Длина звеньев, см										
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	O_1A	O_2B	O_2D	O_3D	O_3F	<i>AB</i>	<i>BC</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DE</i>	<i>EF</i>
16	40	36	22	15	-	-	15	20	40	-	-	45	20	24	-	40	-
17	145	96	-	-	-	-	15	28	-	-	-	84	20	51	-	-	-
18	45	70	9	37	-	-	16	-	39	-	25	78	38	41	19	-	57
19	40	42	39	-	-	-	20	-	20	-	-	71	30	-	-	57	-
20	145	27	24	30	-	-	20	50	-	-	30	8	32	58	29	-	35
21	115	46	-	-	-	-	15	-	45	-	-	78	39	26	52	-	38
22	305	46	23	11	-	-	15	15	-	38	-	44	25	30	22	15	40
23	130	31	30	50	-	-	15	30	-	50	-	40	16	6	30	-	30
24	115	36	39	13	31	-	17	23	-	17	-	35	11	45	25	25	44
25	325	72	36	-	-	-	15	-	30	-	-	76	46	50	35	-	51
26	215	36	53	36	32	-	19	40	-	-	19	76	38	68	35	-	29
27	140	71	27	32	40	-	16	30	-	50	-	46	33	40	20	-	50
0	215	30	20	35	-	-	19	-	19	-	-	59	29	24	-	48	36

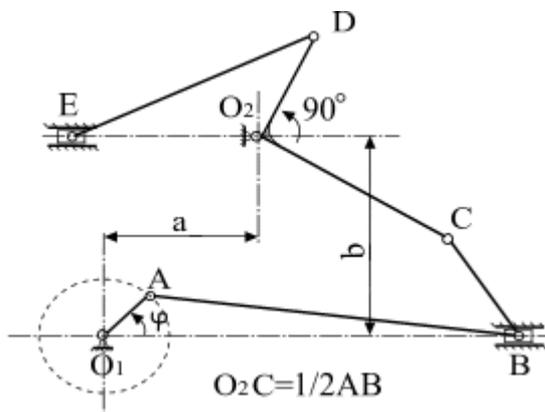
Таблица 10



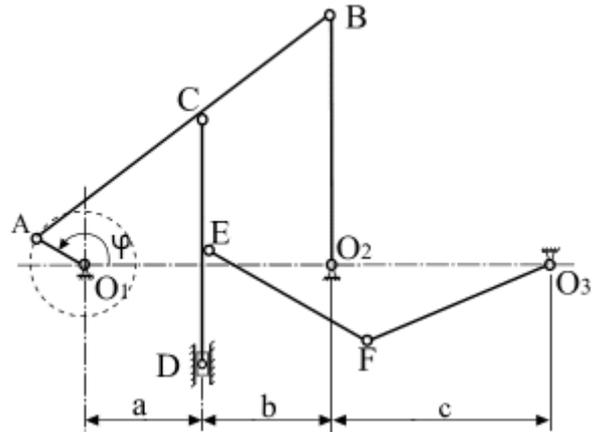




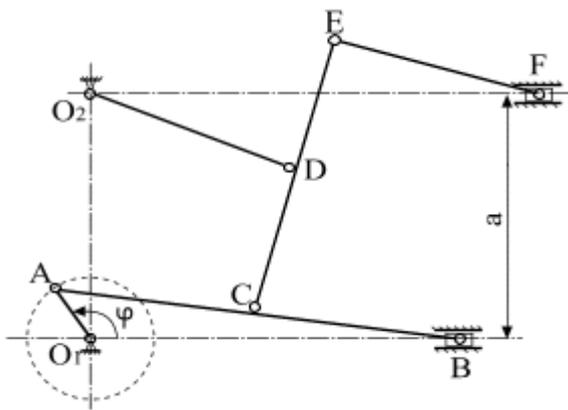
19



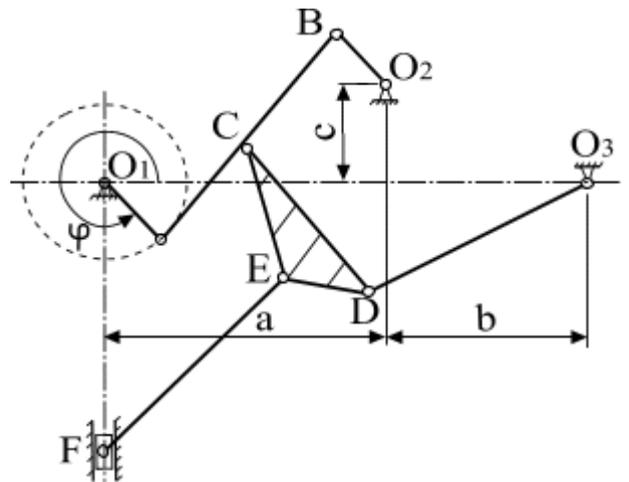
20



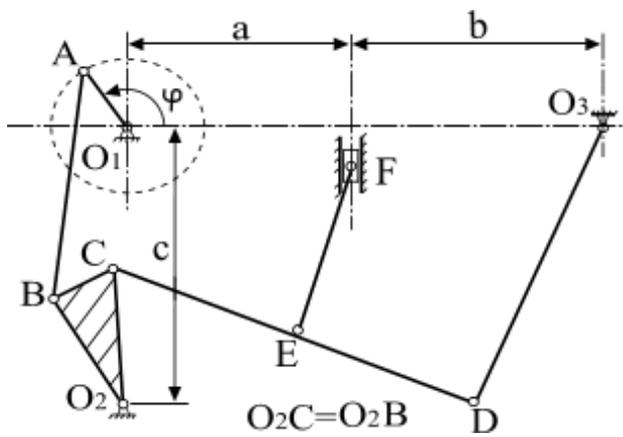
21



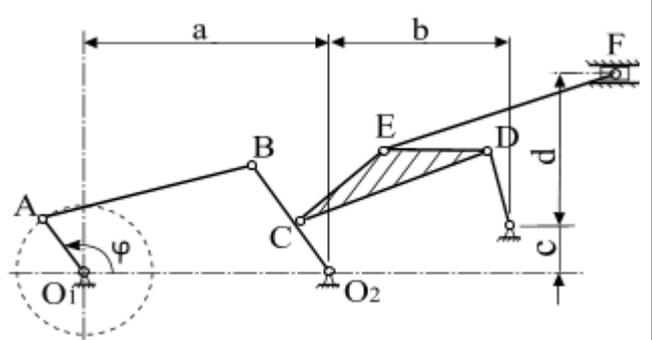
22

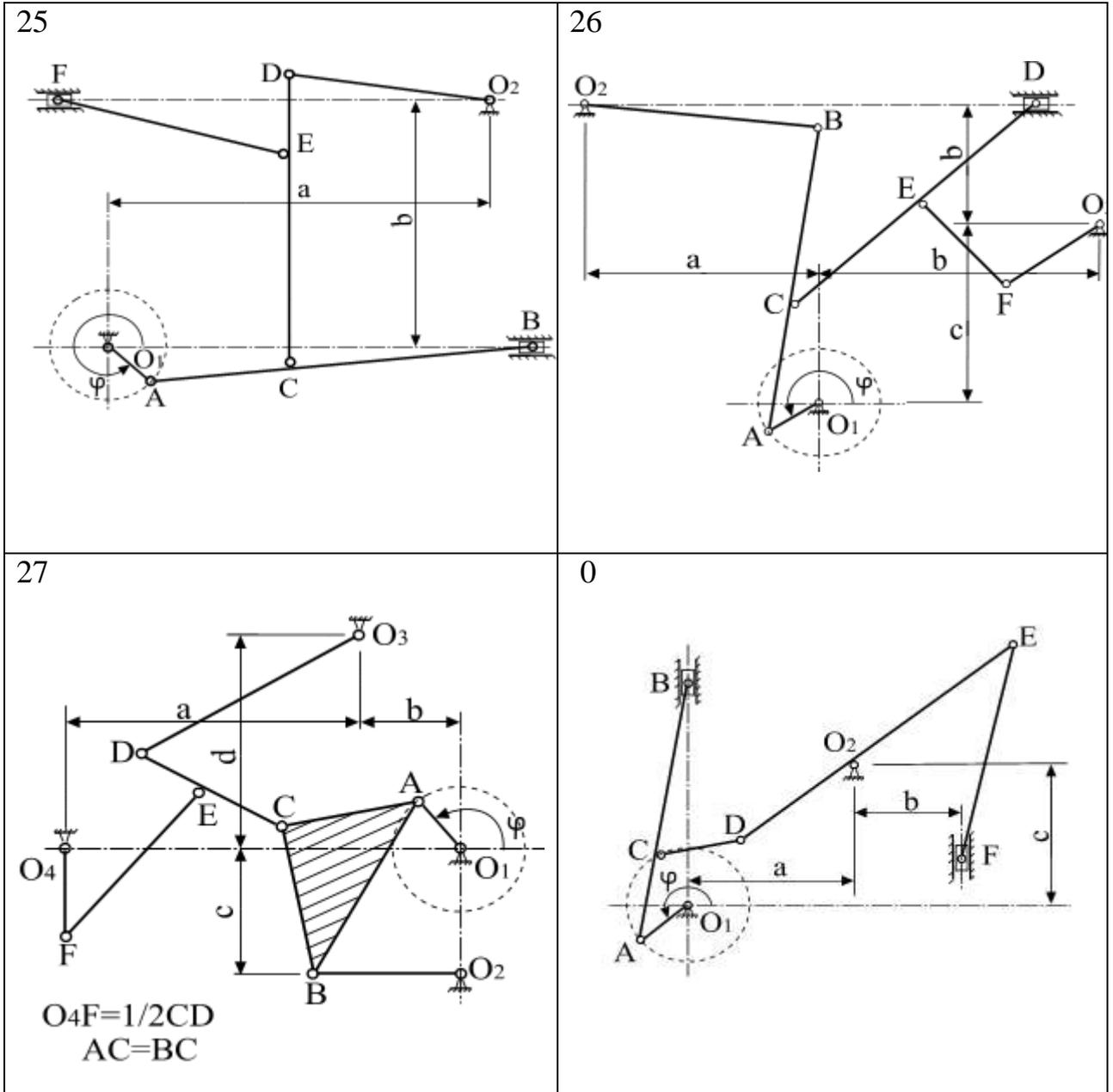


23



24





Указания по выполнению

При выполнении данной задачи все построения должны выполняться в масштабе: механизм строится в масштабе (обычно 1:10 или 1:5); векторы скорости строятся в масштабе (обычно в 1 см – 10 см/с).

Расстояния от точек до МЦС звеньев берутся из чертежа (измеряются линейкой).

Контрольная работа №3. Плоская система сил

Задача 1. Уравнения равновесия плоской системы сил

Для заданных абсолютно жестких конструкций требуется:

- вычислить реакции опор;
- проверить правильность полученных результатов.

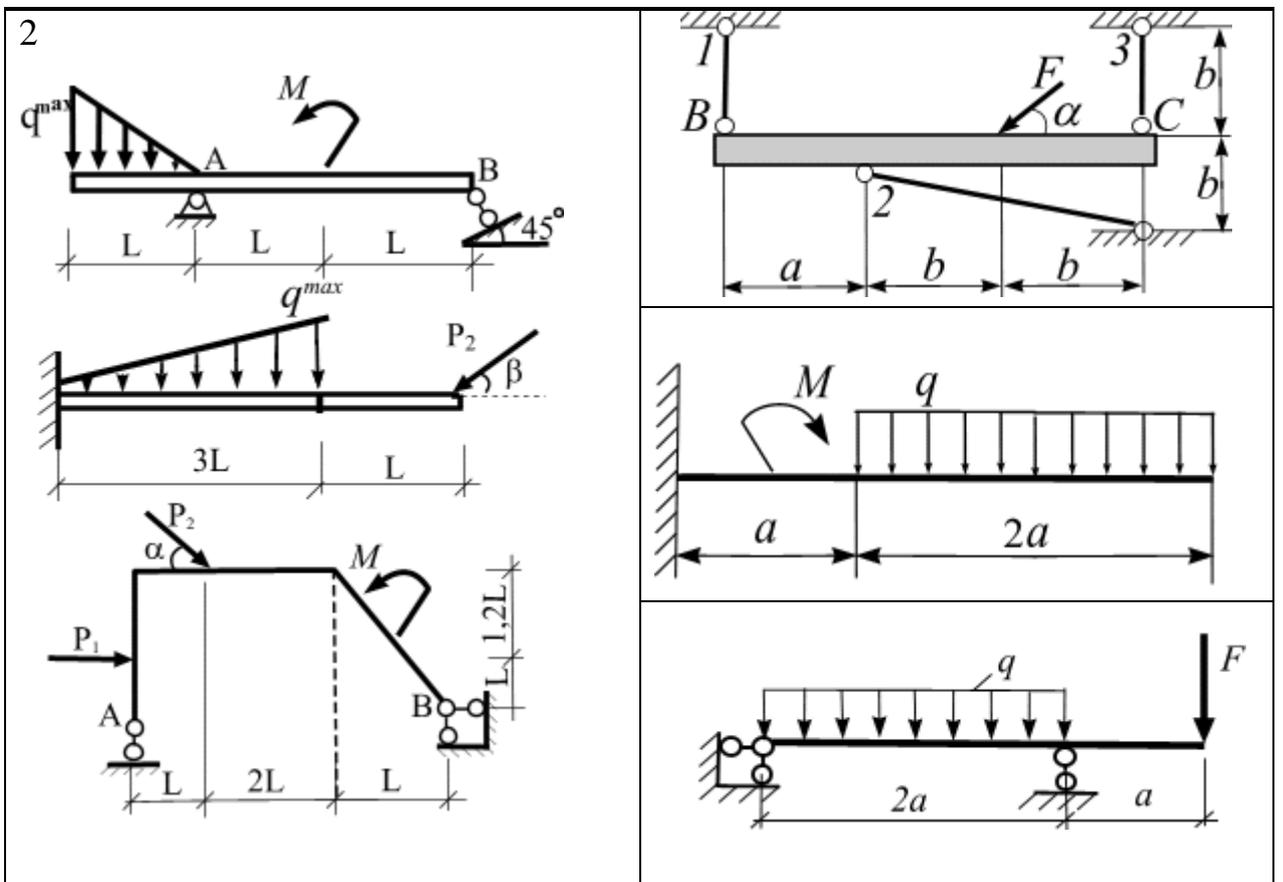
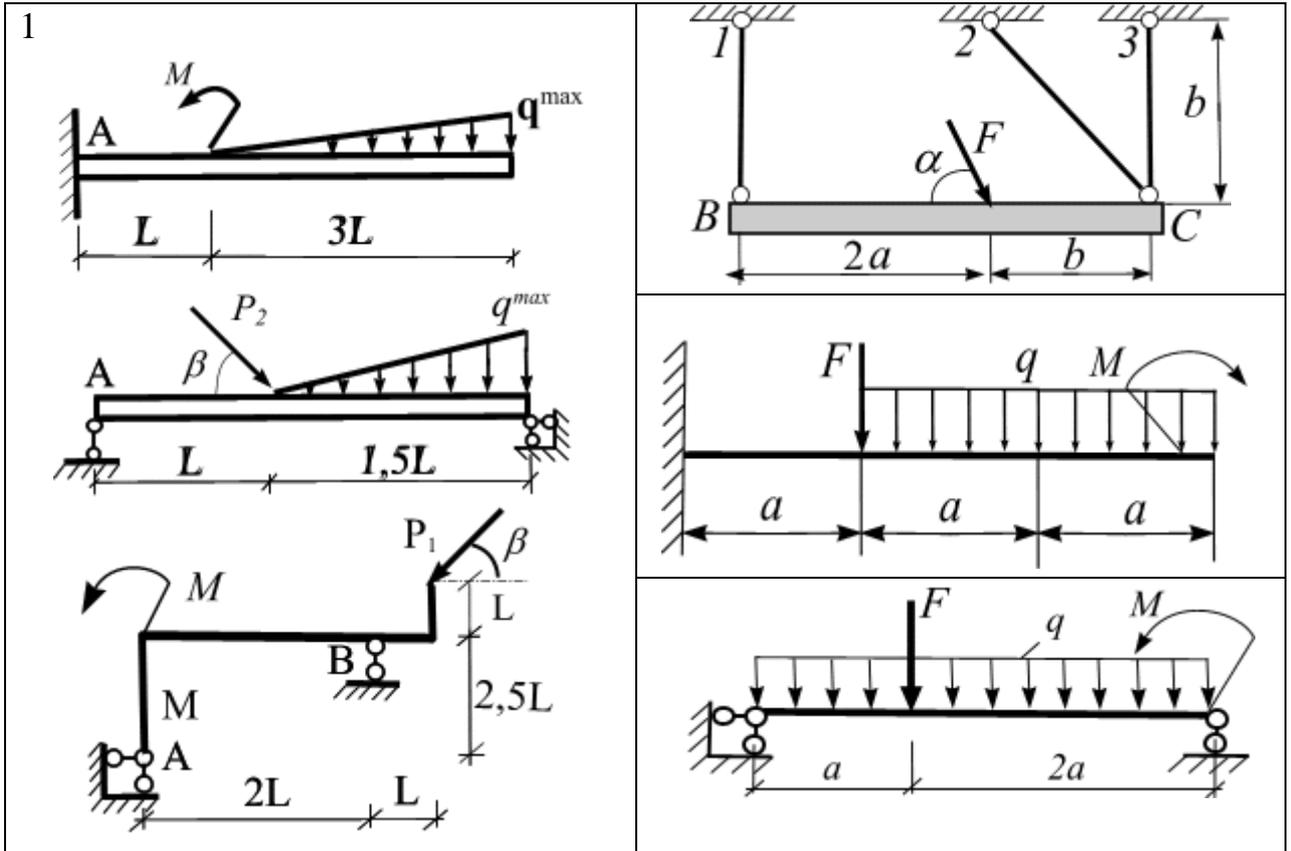
Исходные данные приведены в табл. 11, расчетные схемы в таблице 12.

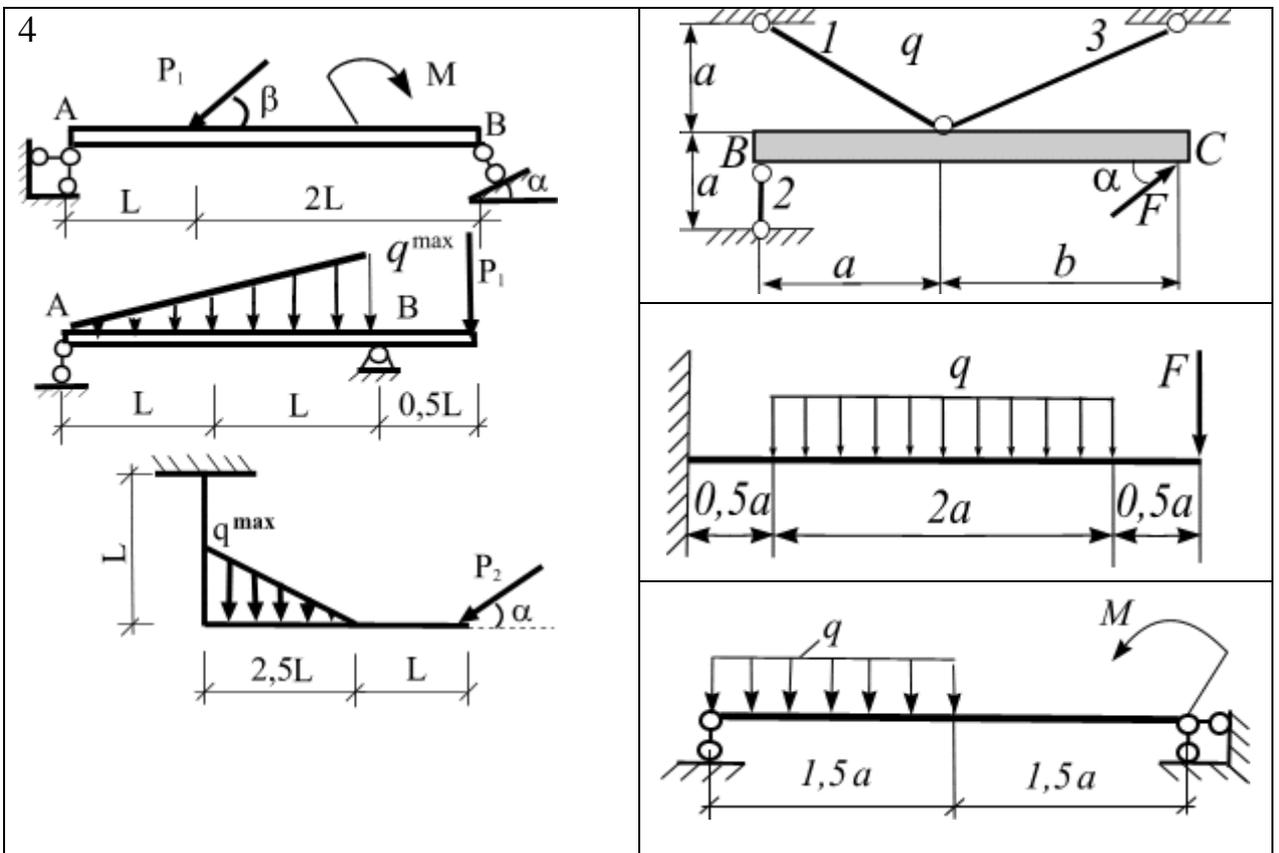
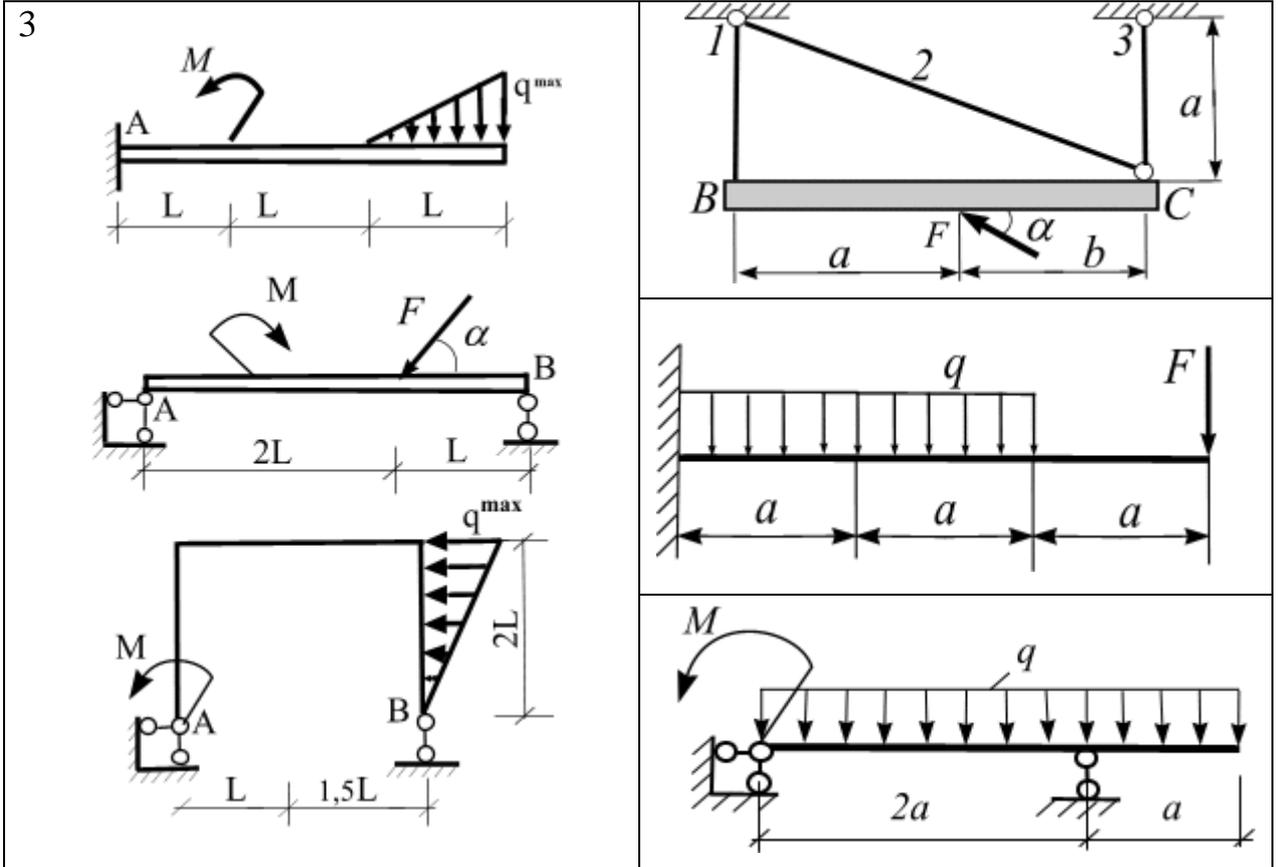
Номер строки в табл. 11 соответствует последней цифре номера зачетной книжки (e), а номер рисунка в табл. 12 соответствуют сумме последних трёх цифр номера зачетной книжки ($z+\delta+e$).

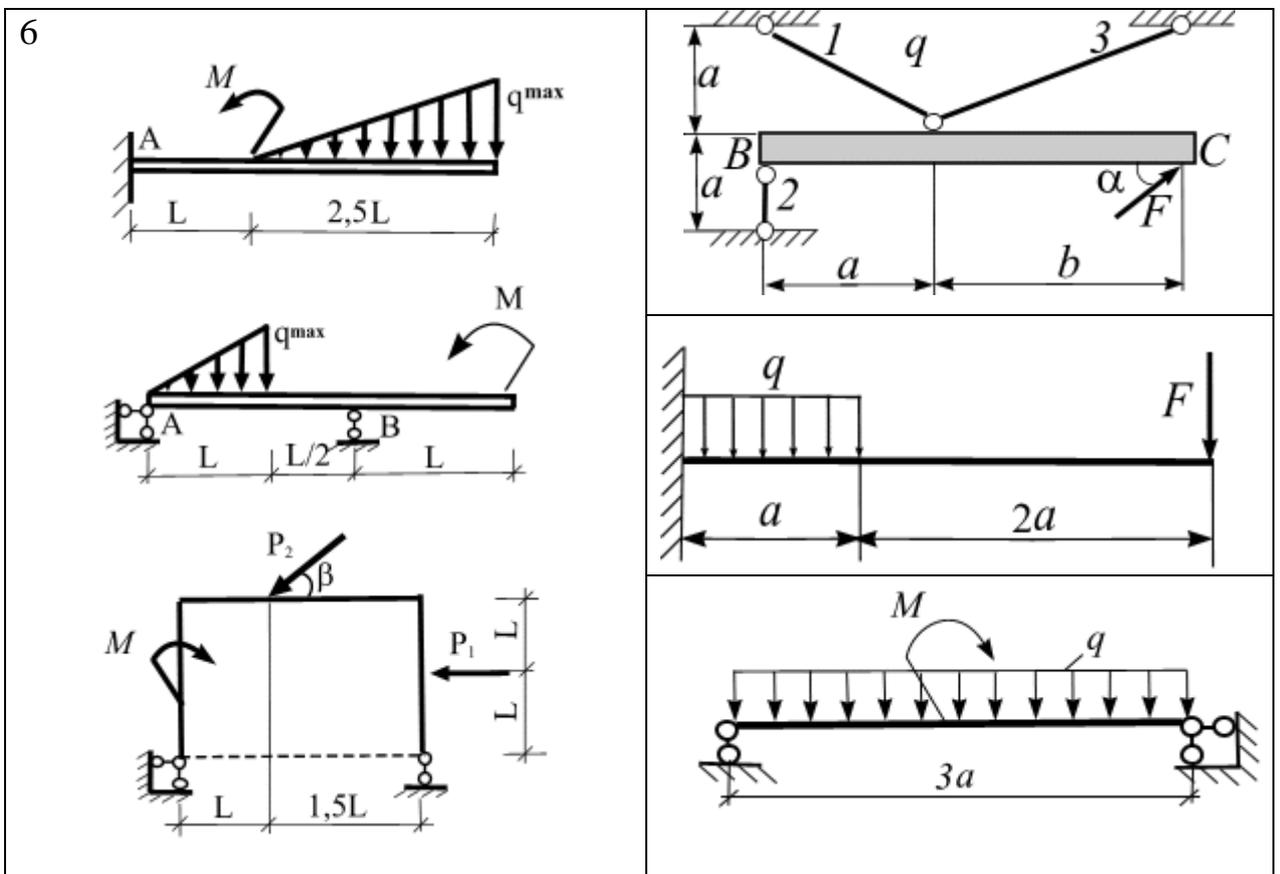
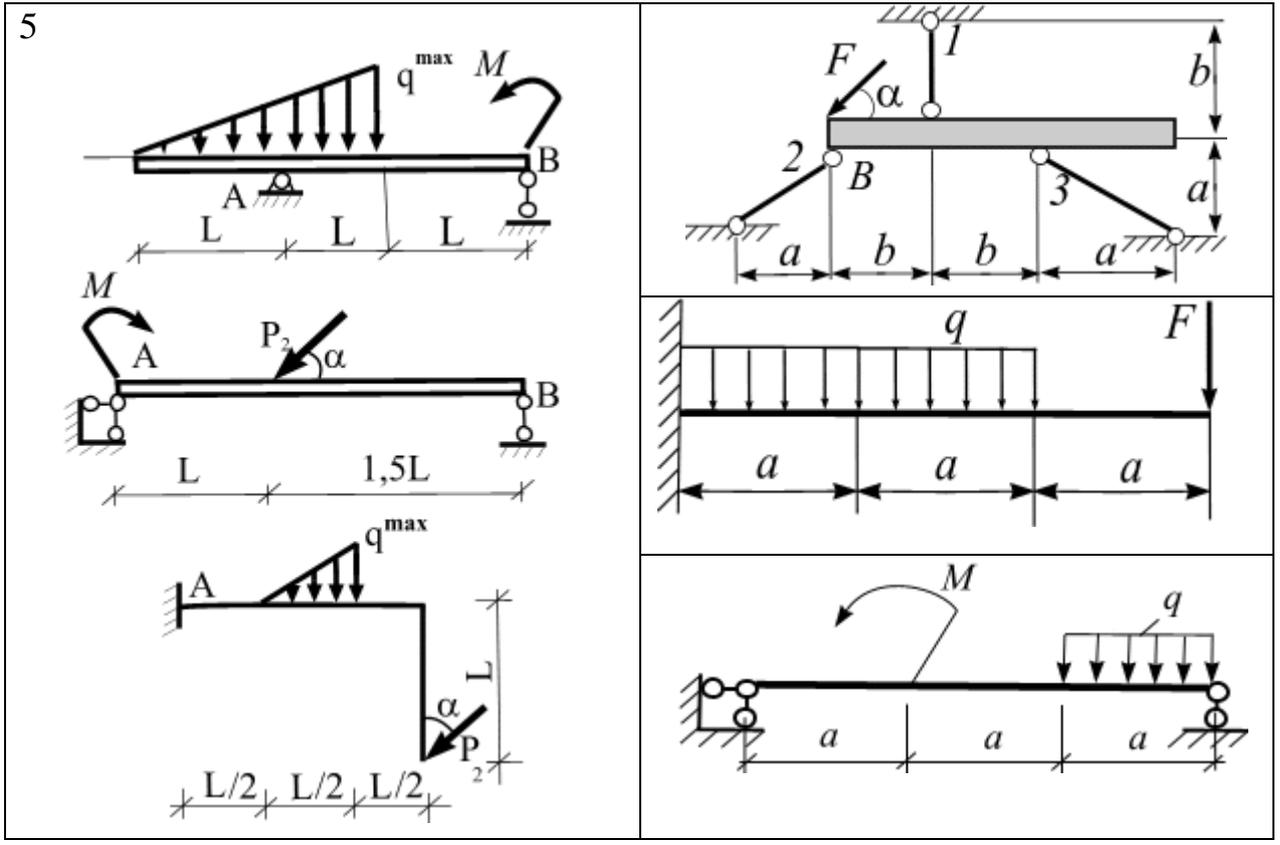
Таблица 11

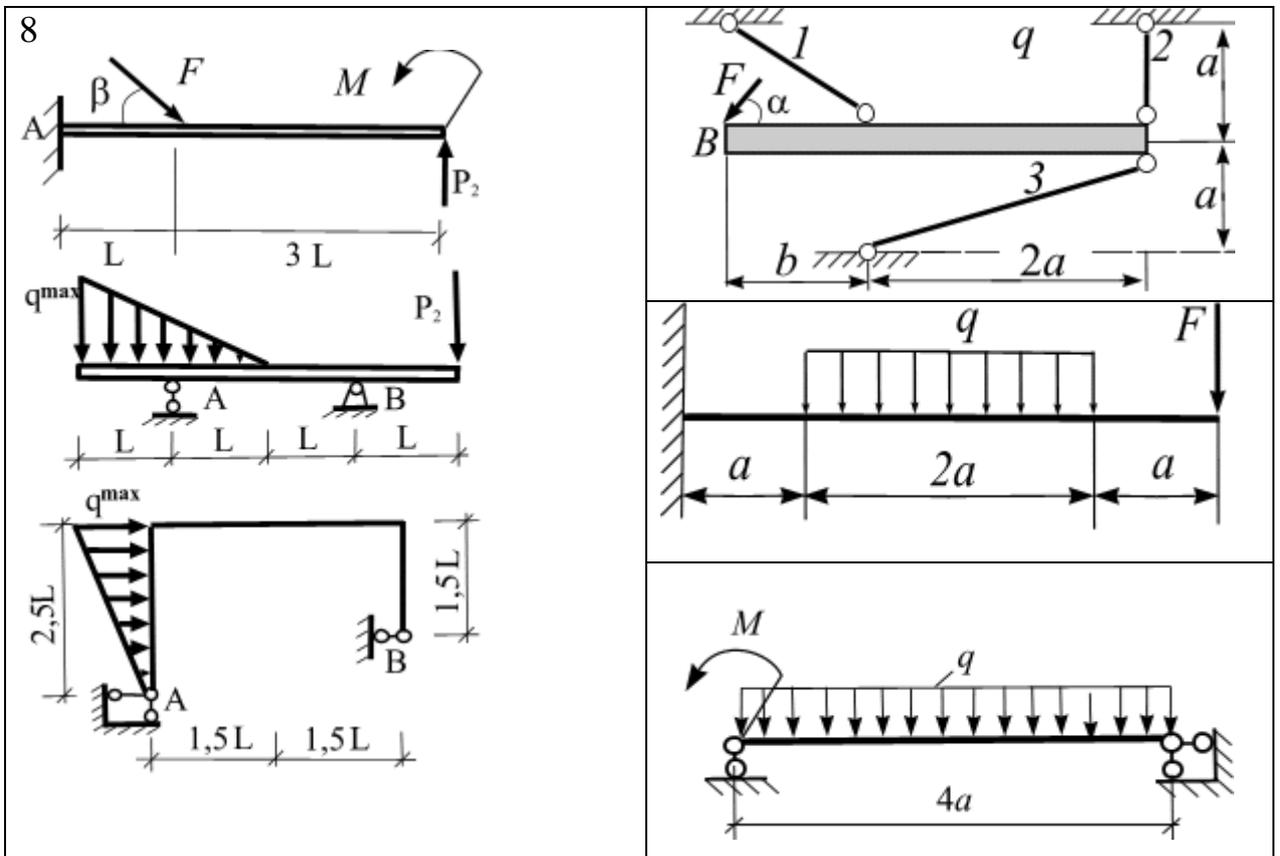
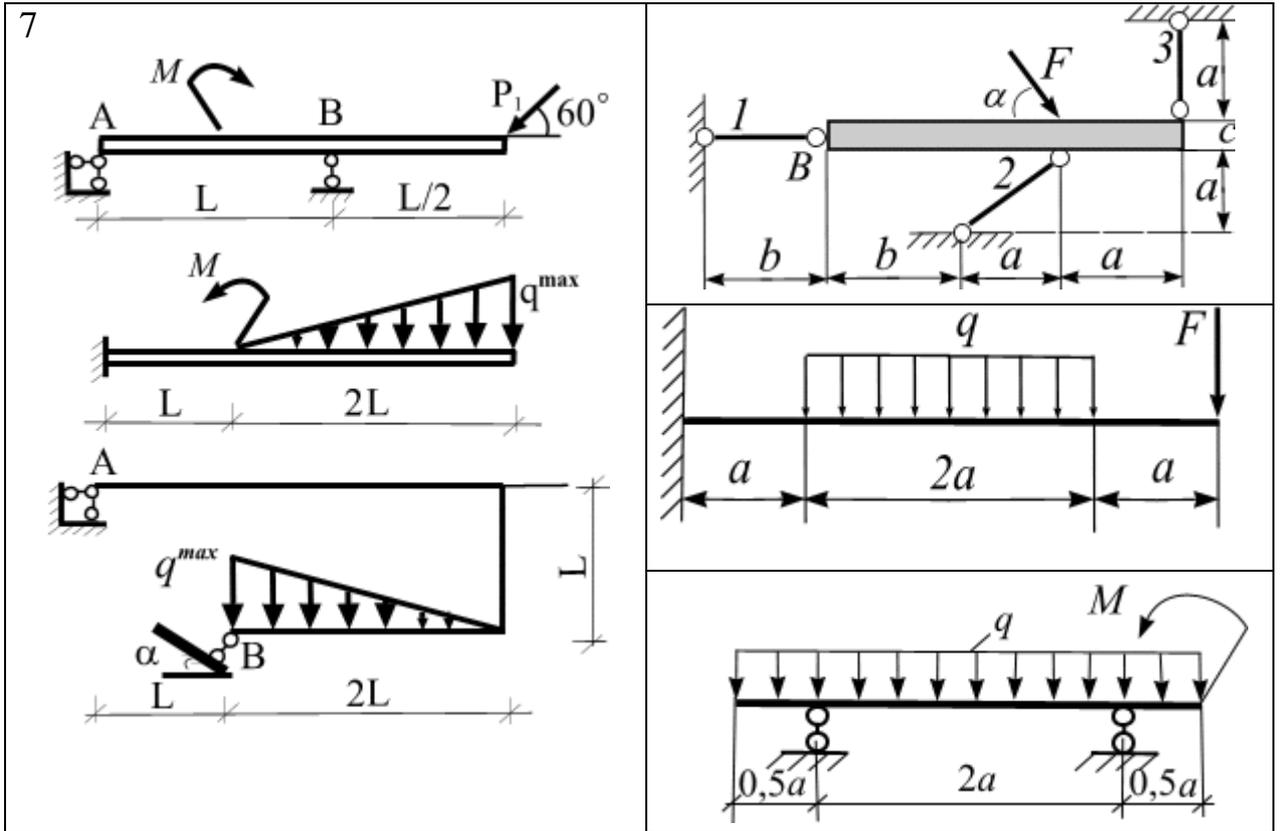
№ варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	L , м	a , м	b , м	α , гр.	β , гр.
1	20	10	16	14	9	2	0,6	0,8	30	60
2	22	12	14	16	11	1.5	0,7	0,9	45	30
3	24	14	24	18	13	2	0,8	0,6	60	45
4	26	16	18	10	12	2	0,6	1,2	30	60
5	28	18	12	12	8	2.5	0,5	0,7	45	30
6	18	11	20	14	9	2	0,4	0,8	60	45
7	16	13	26	26	6	5	0,8	1,5	30	60
8	14	15	22	18	11	3	0,9	0,6	45	30
9	30	17	28	20	10	1.5	1,0	1,3	60	45
0	32	19	30	24	8	2	1,2	1,1	30	60

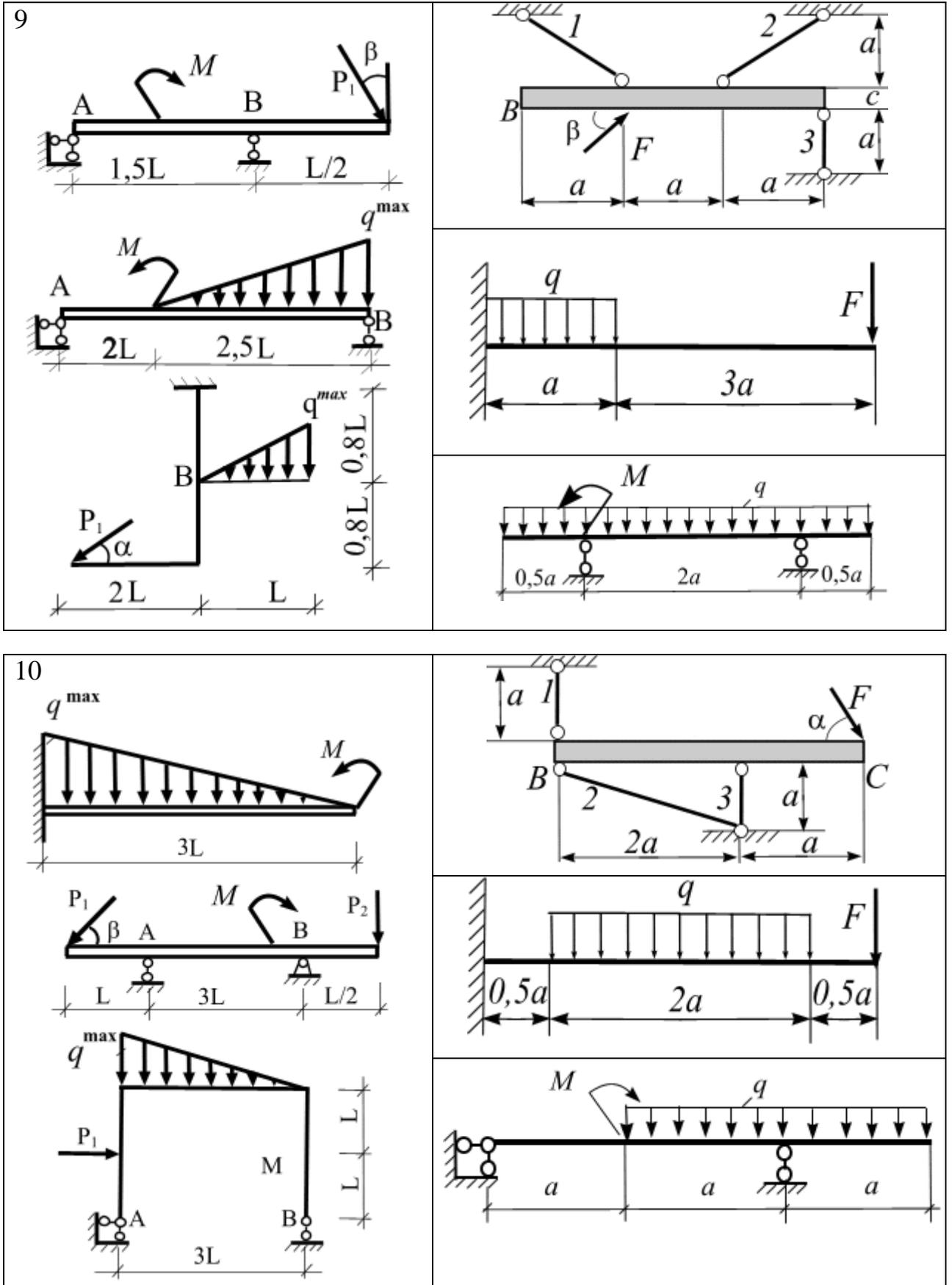
Таблица 12

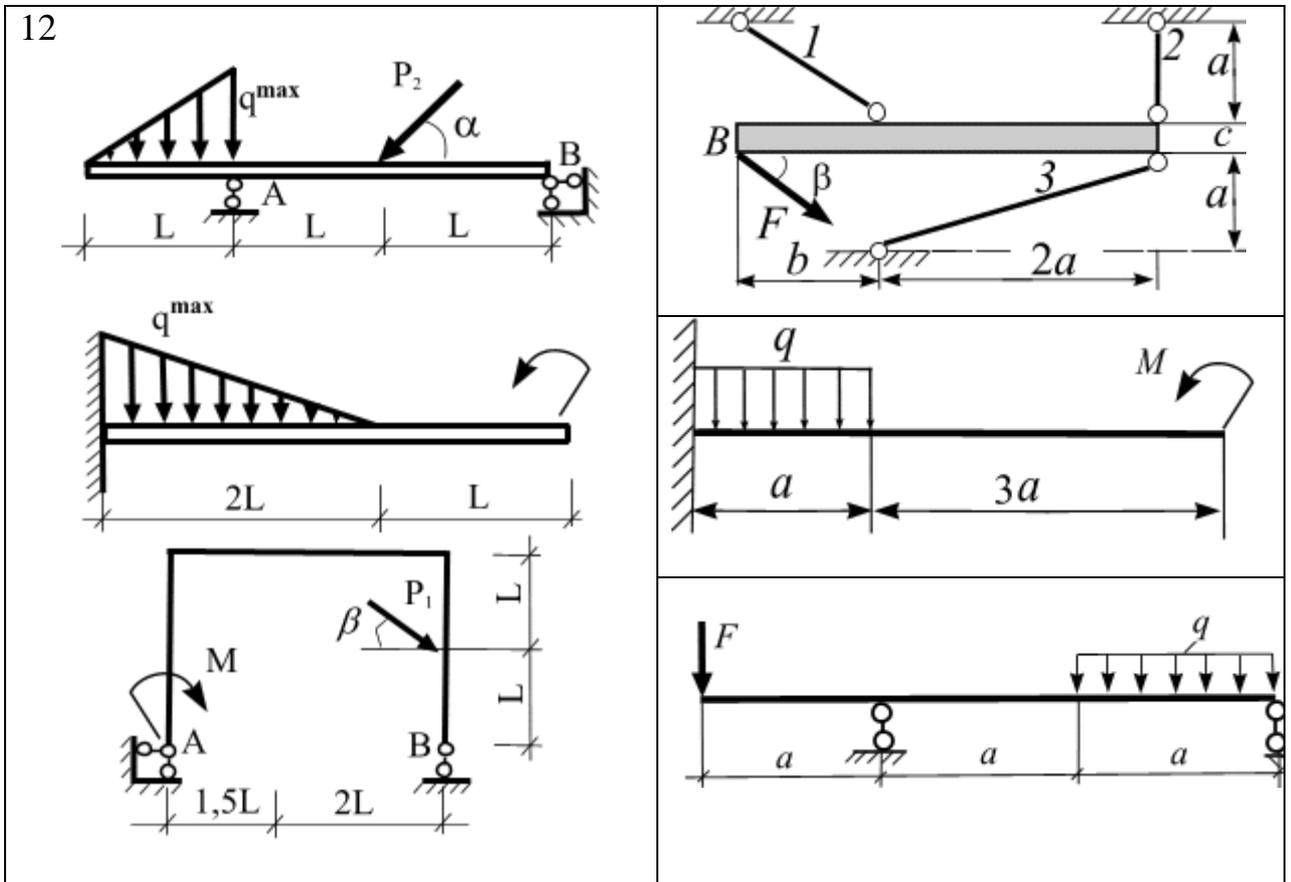
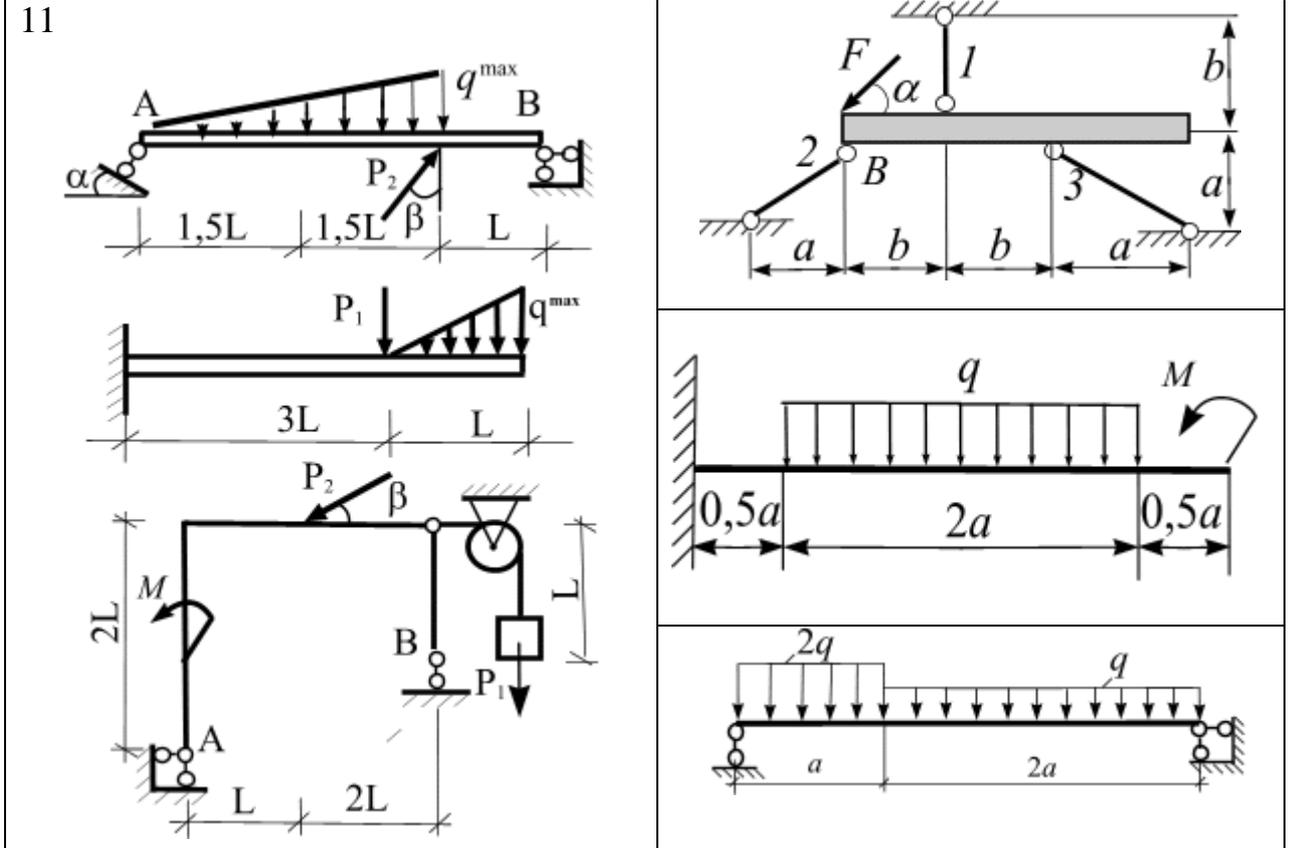




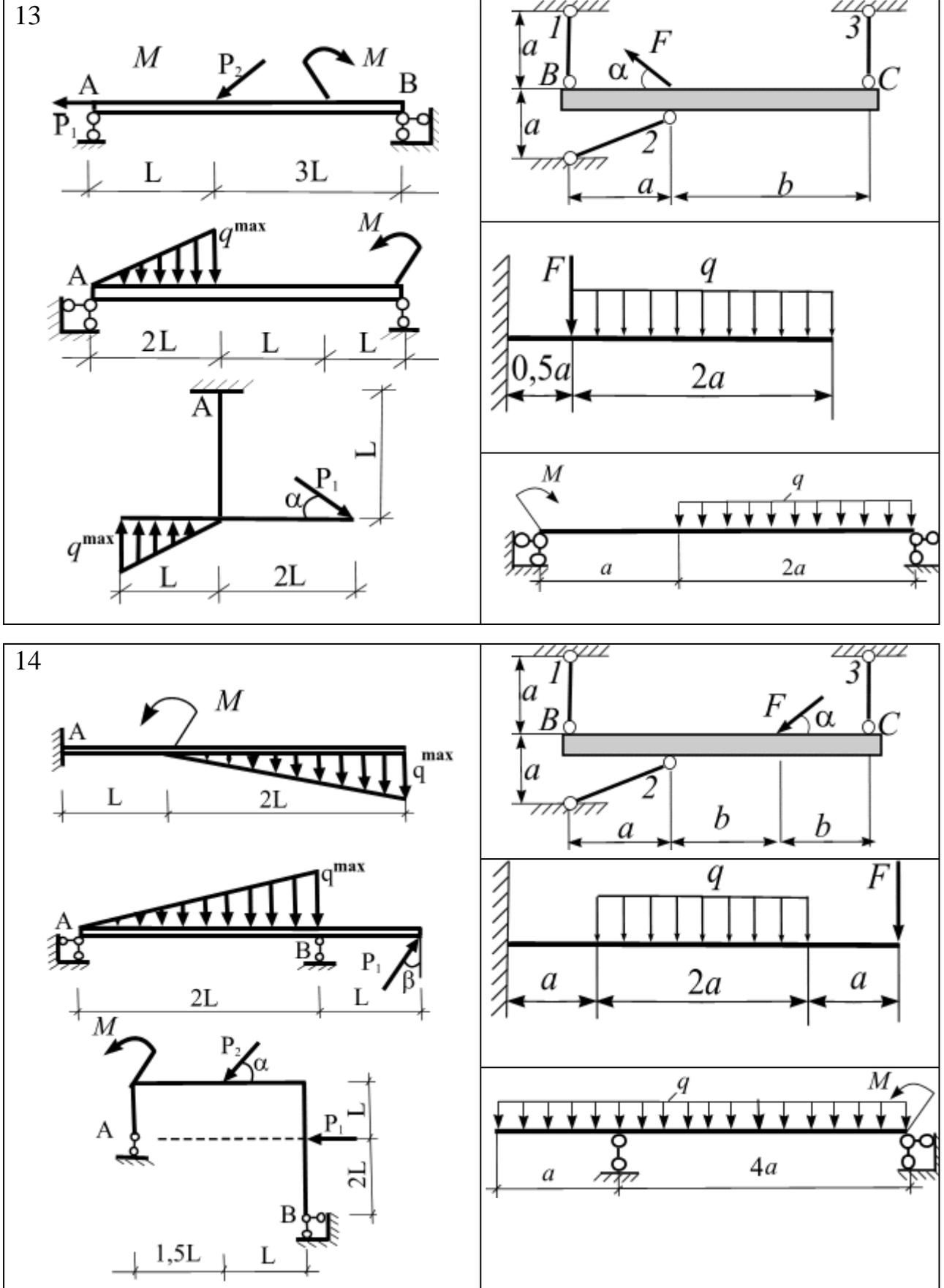


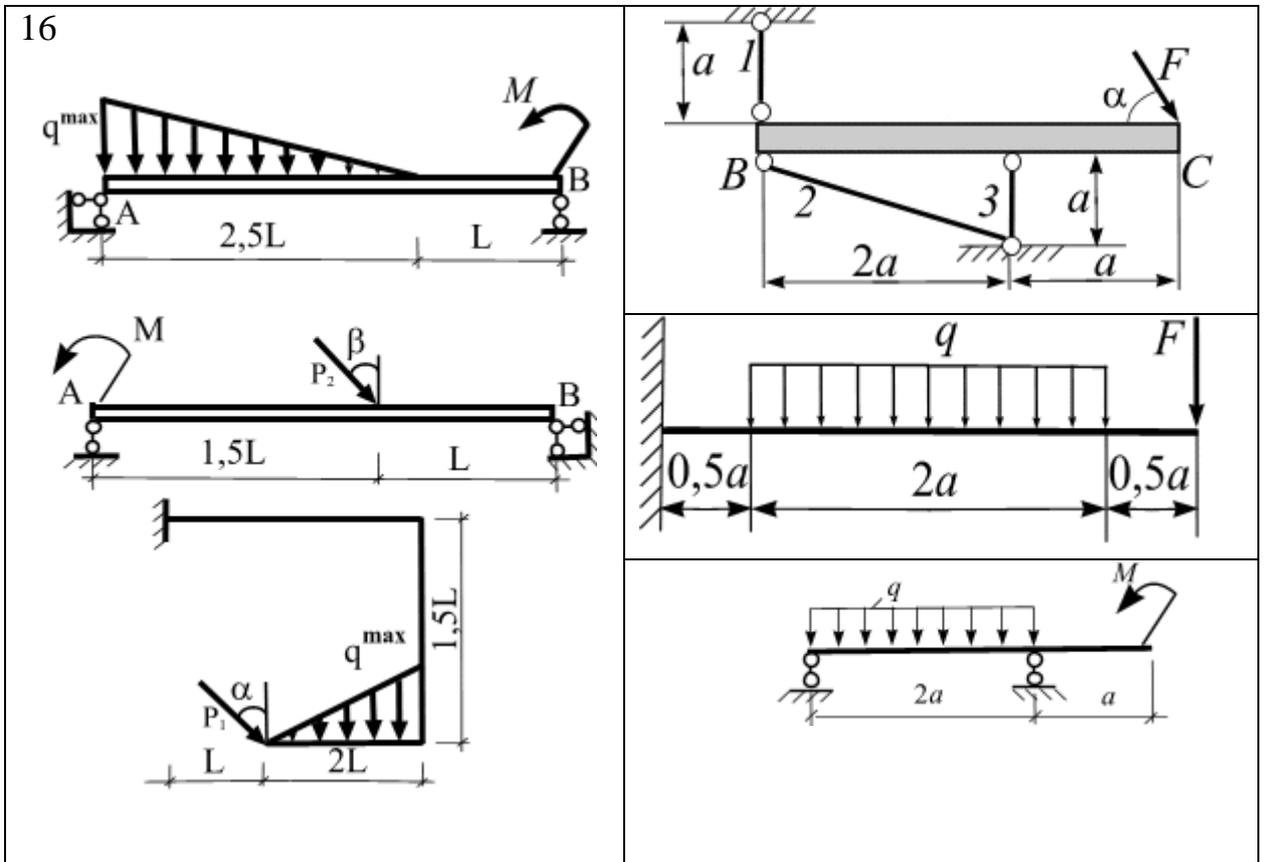
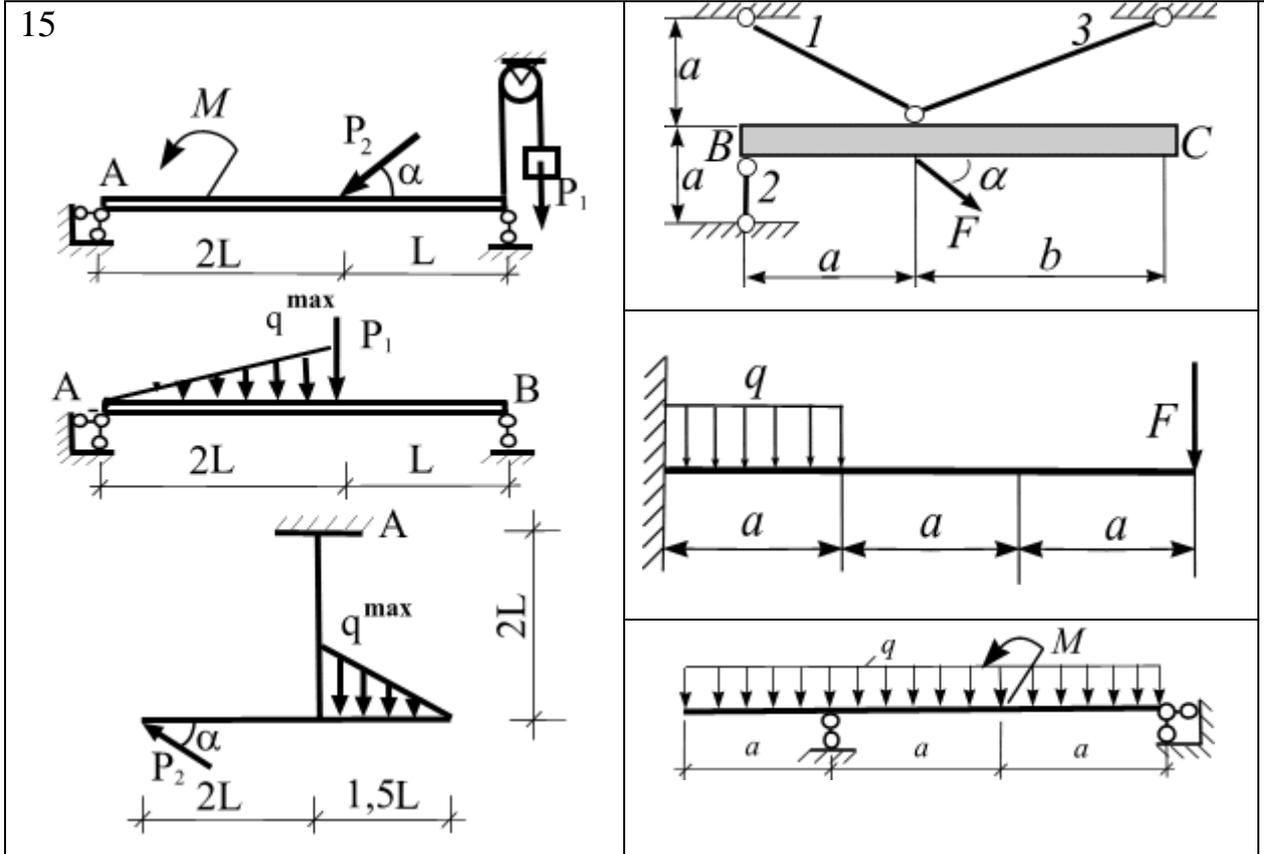


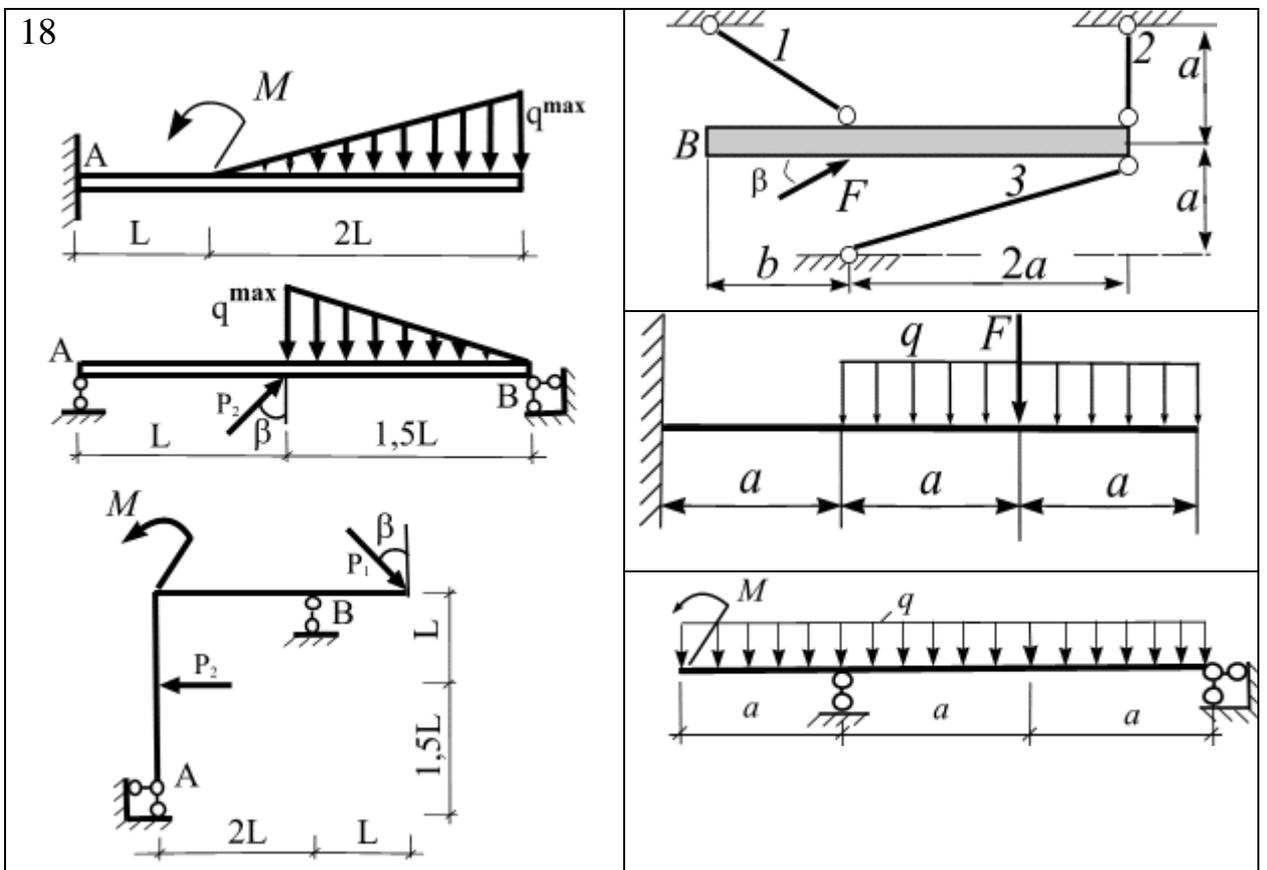
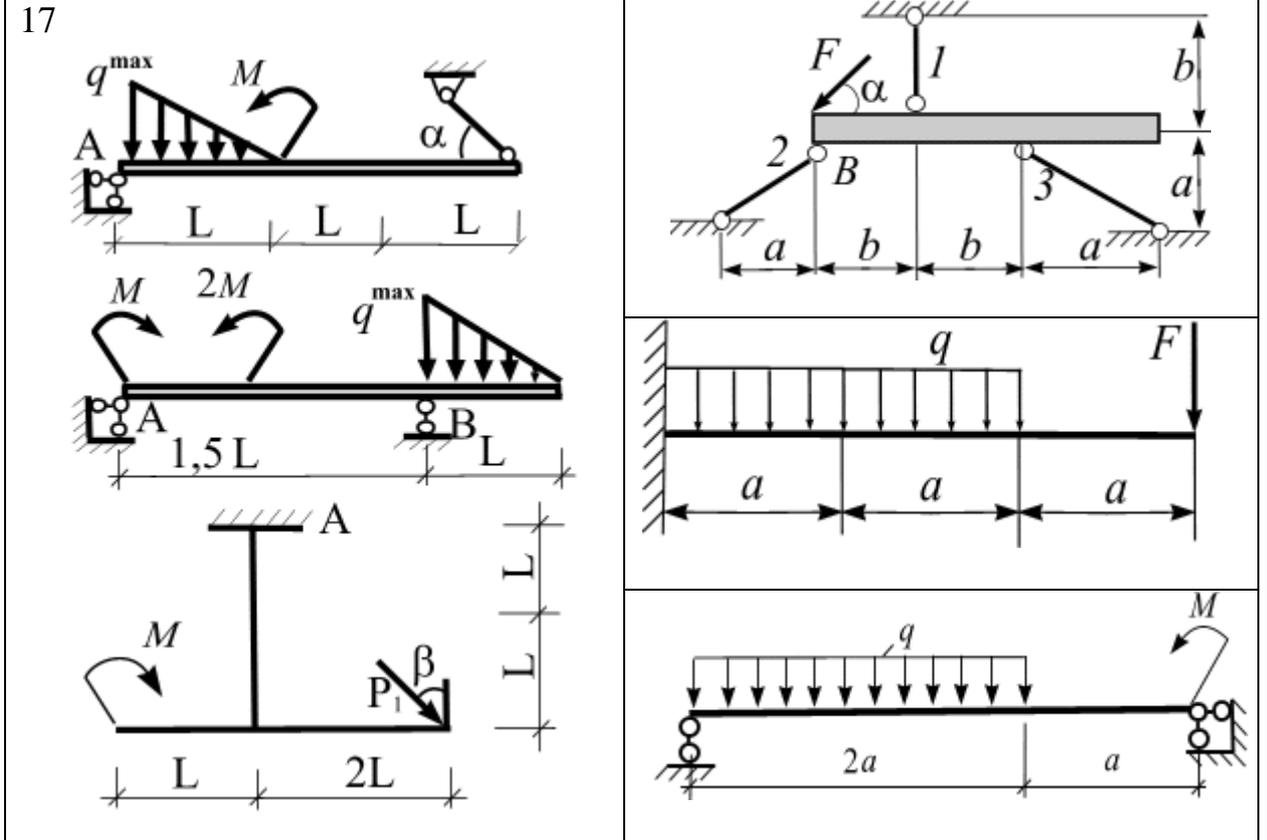


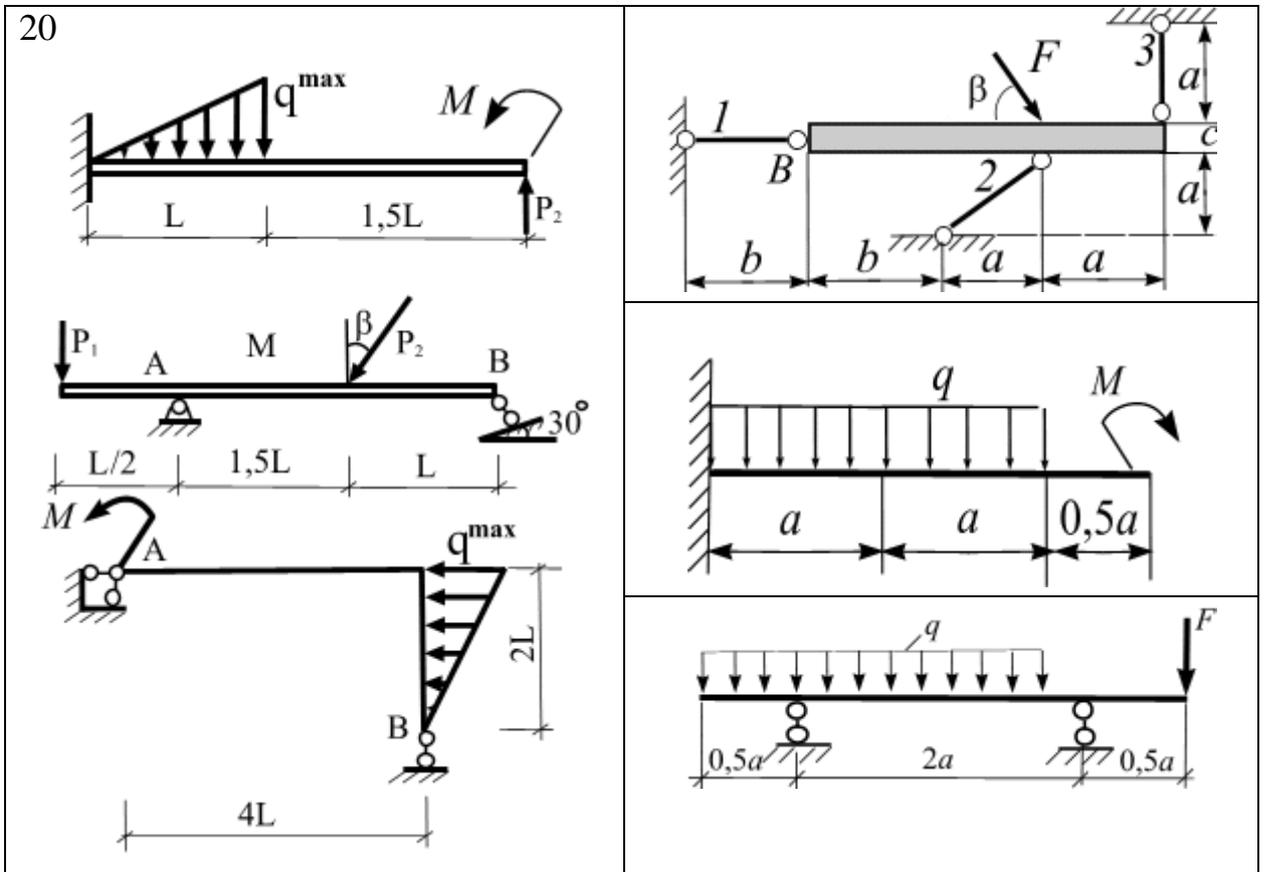
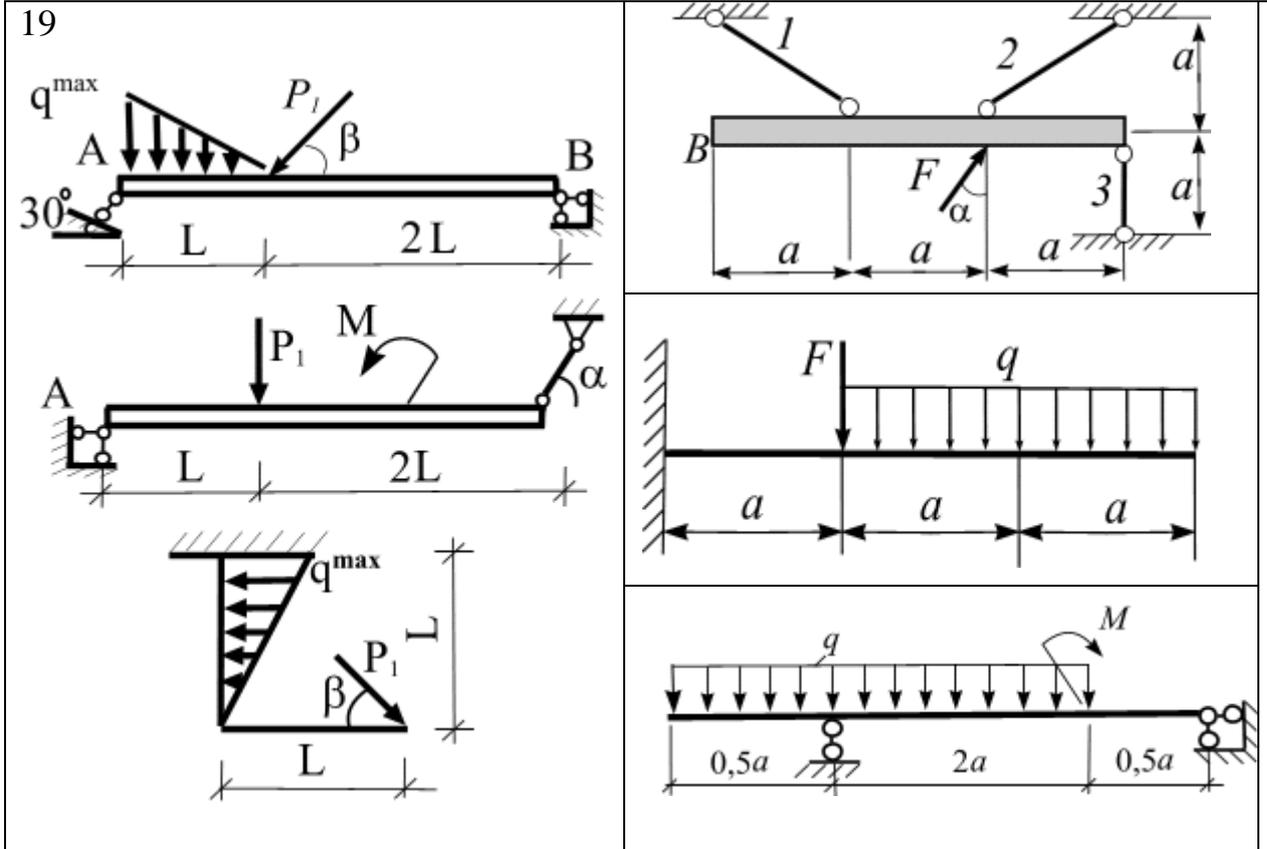


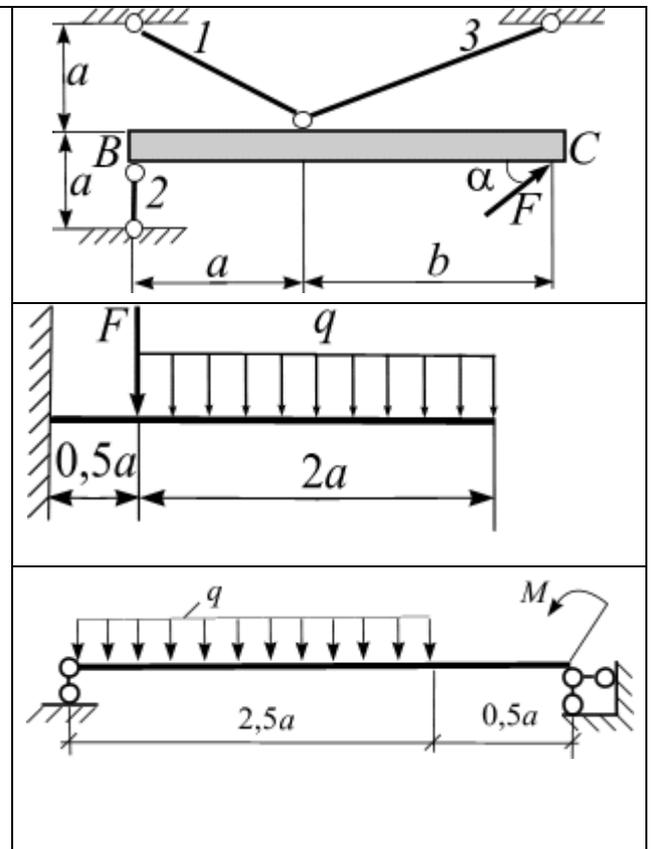
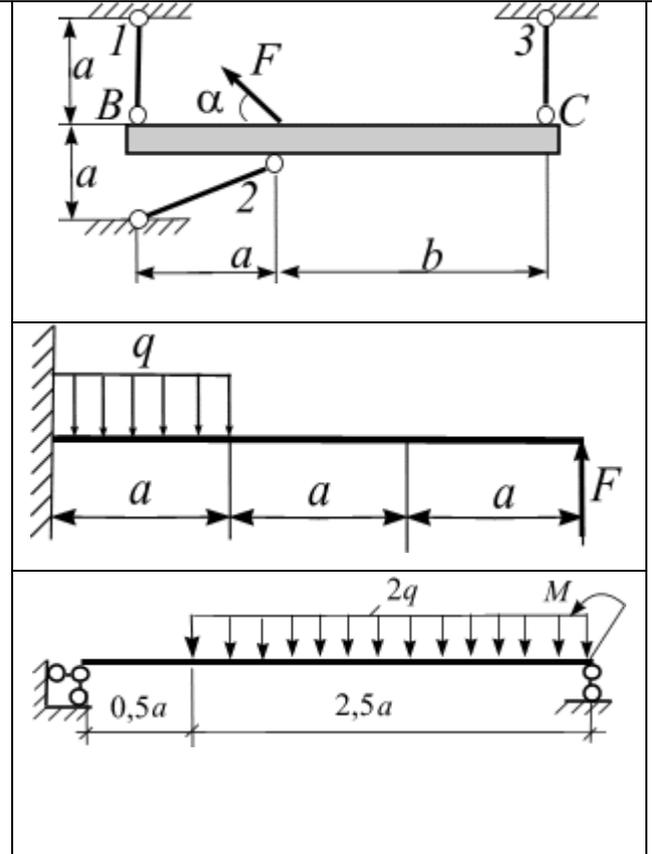
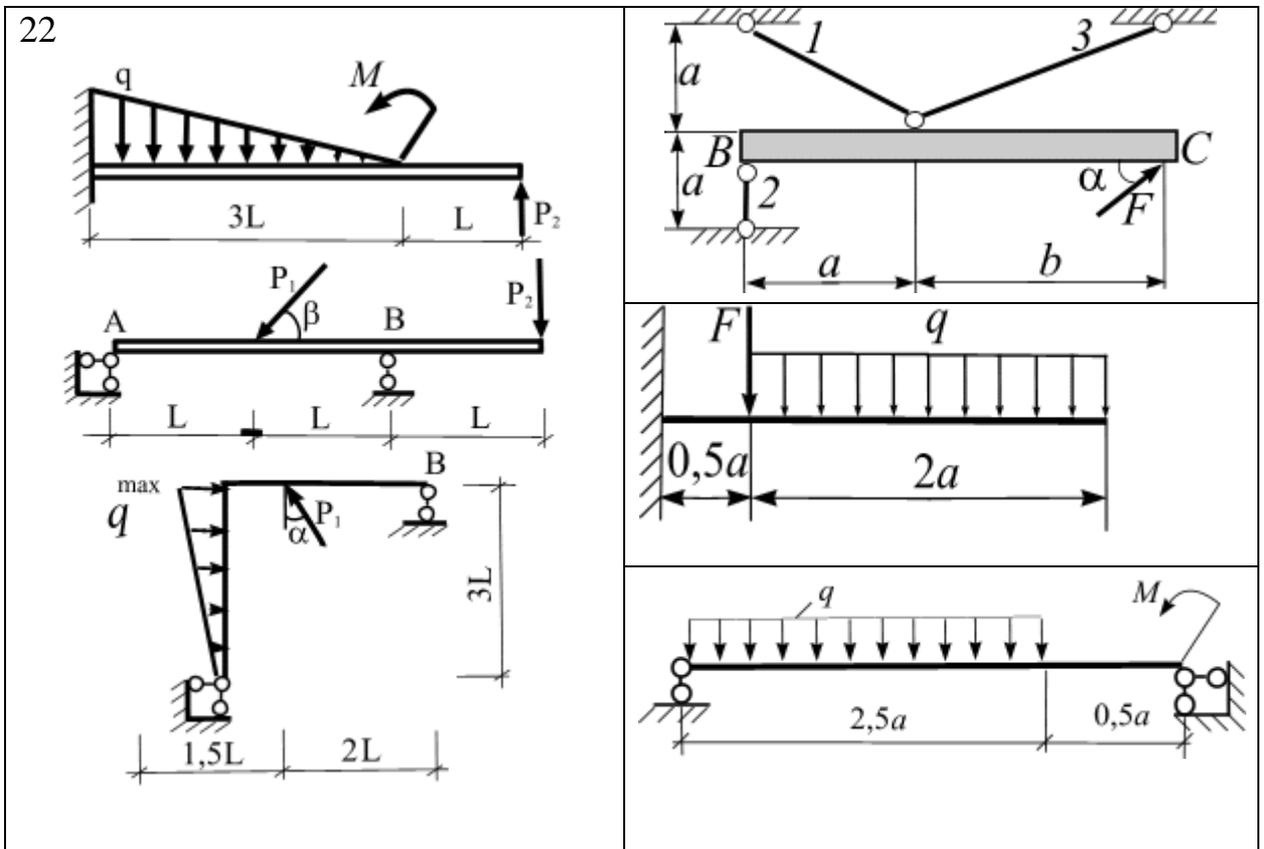
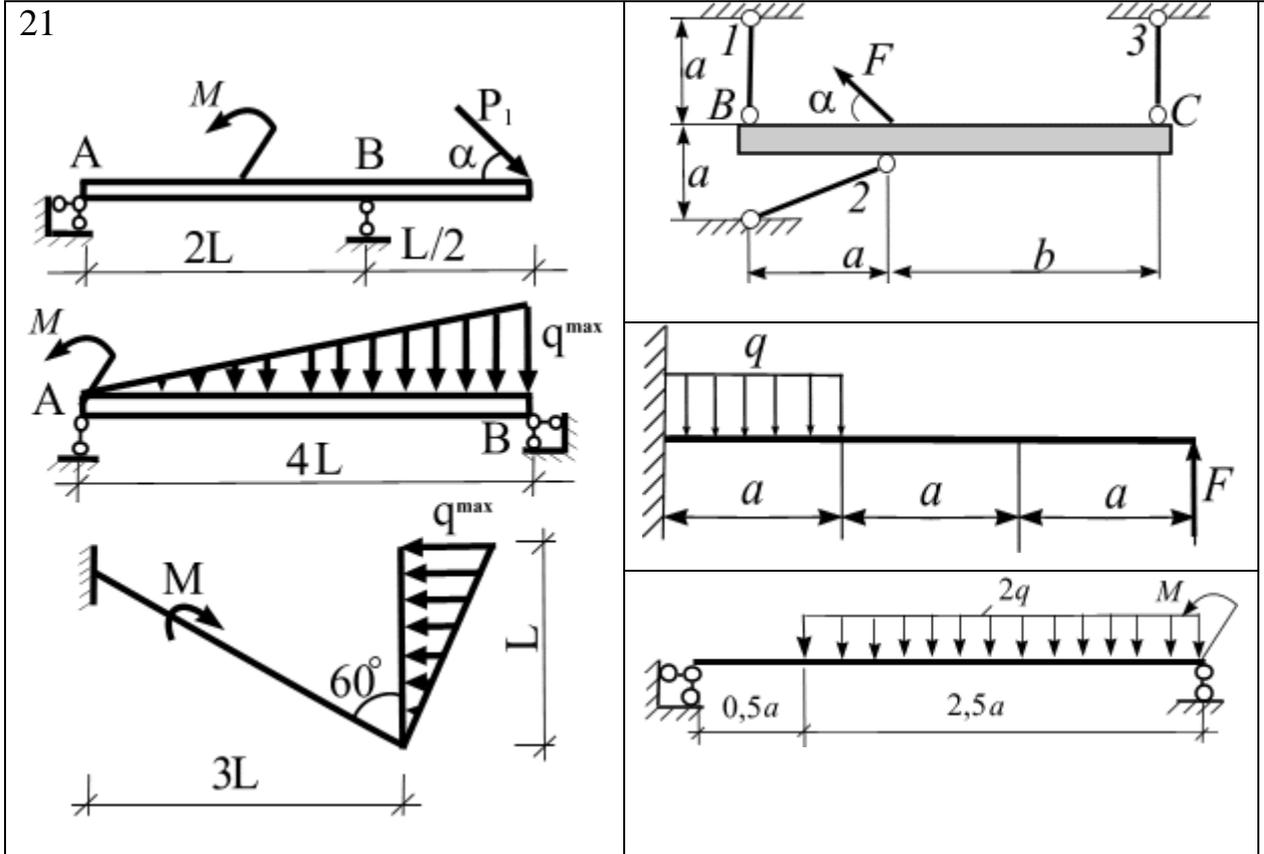
Продолжение табл. 12

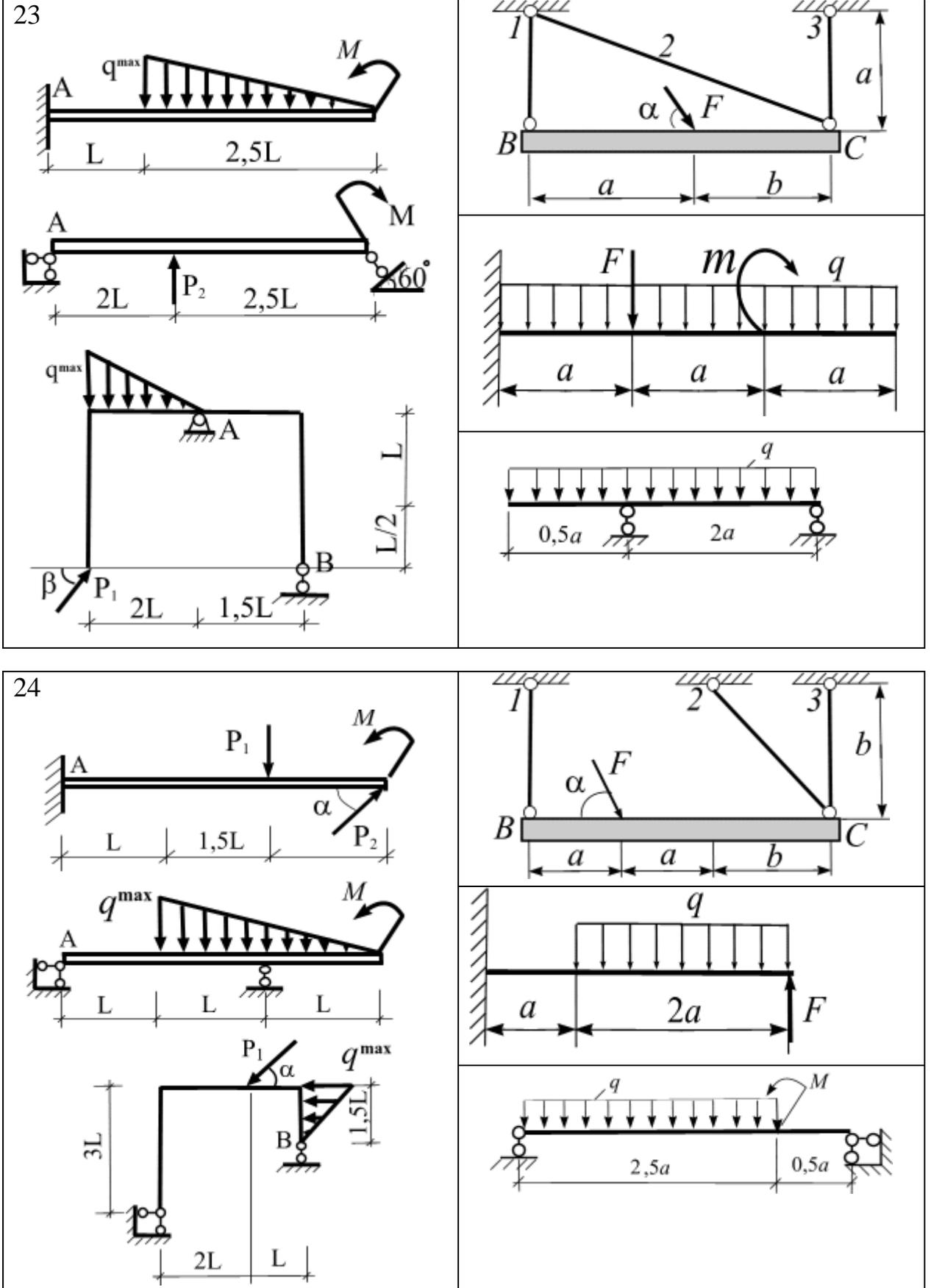


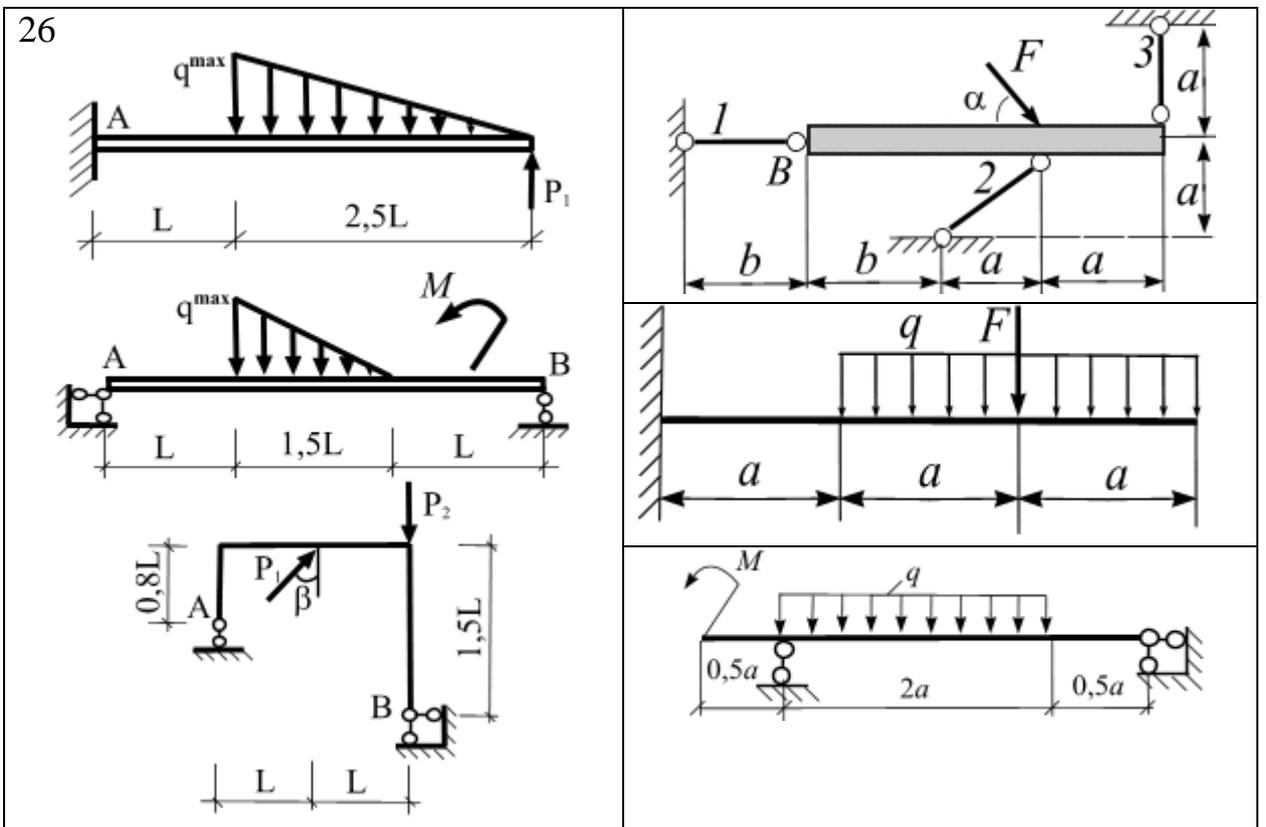
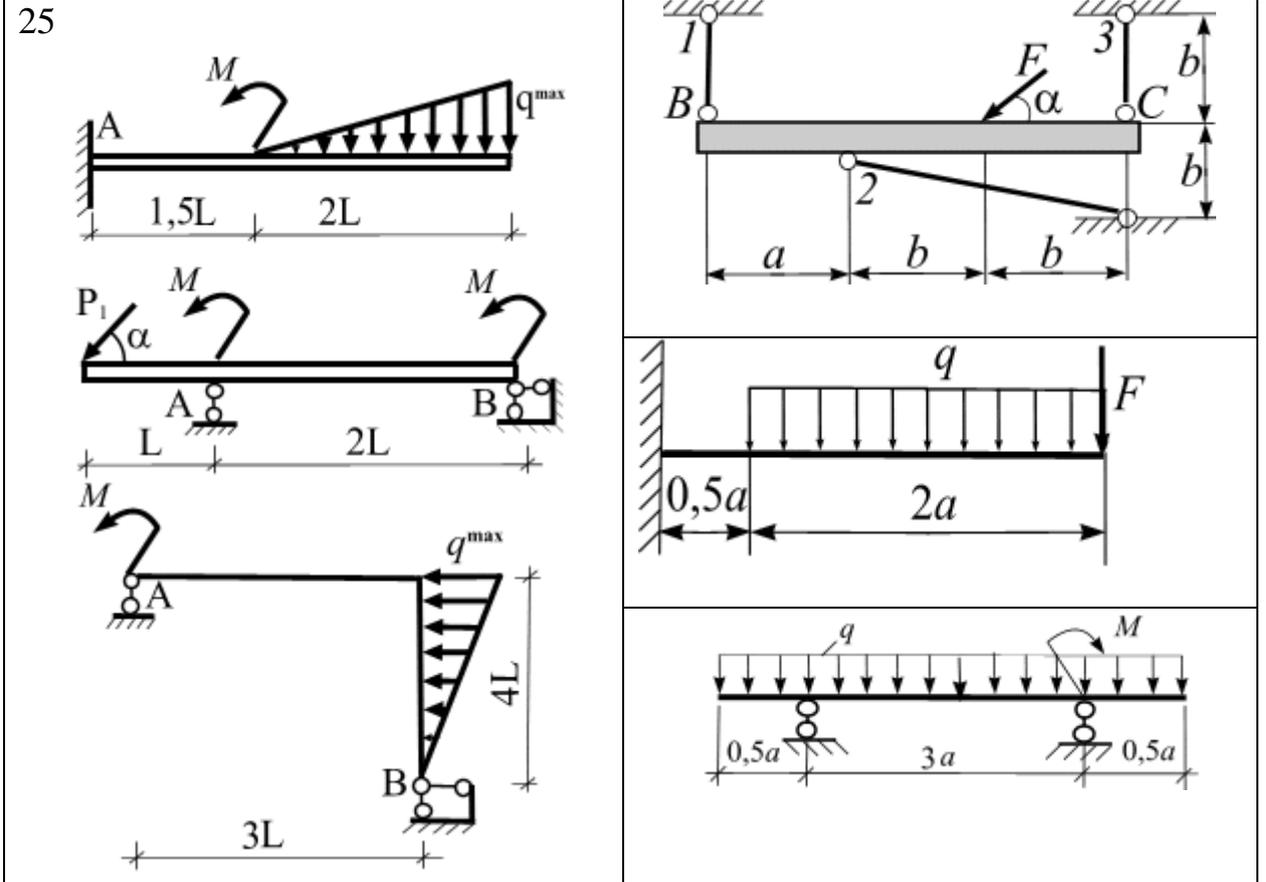


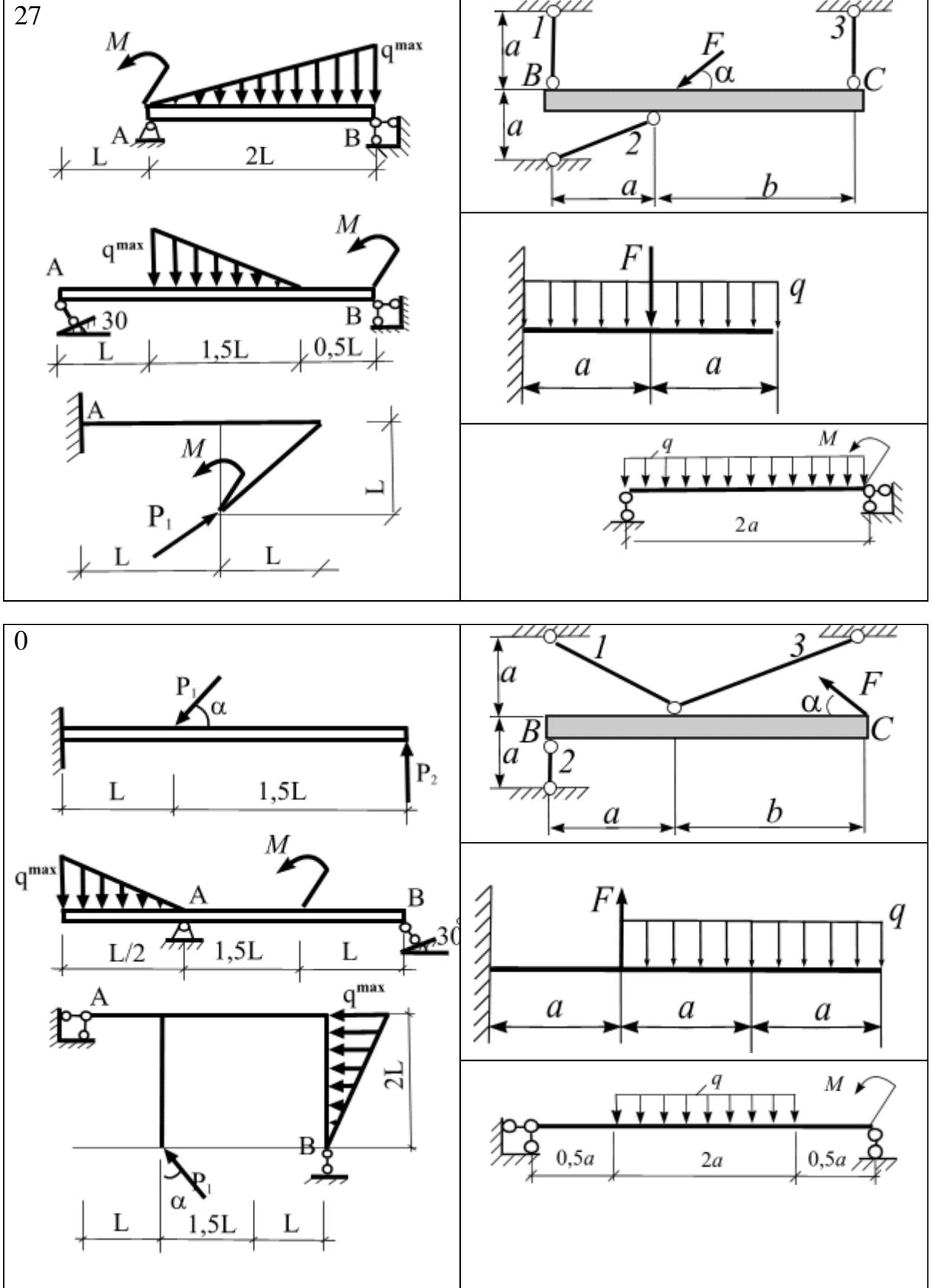












Задача 2. Расчет плоских ферм

Для плоской статически определимой фермы требуется:

- вычислить реакции опор от заданной нагрузки;
- проверить правильность полученных результатов;
- вычислить усилия в стержнях фермы способом вырезания узлов;
- проверить правильность полученных результатов методом сплошных сечений;
- проанализировать полученные результаты.

Исходные данные приведены в табл. 13, в схеме табл. 14.

Номер строки в табл. 13 соответствует последней цифре номера зачетной книжки (e), а номер рисунка в табл. 14 соответствуют сумме последних трёх цифр номера зачетной книжки ($c+d+e$).

Таблица 13

№ строки	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	L, м
1	10	21	15	2
2	11	23	23	3
3	12	24	16	2.5
4	14	25	24	2.5
5	16	28	16	2.5
6	15	25	25	2.5
7	17	24	18	2.5
8	13	21	28	2
9	18	23	18	2
0	14	28	23	2

Таблица 14

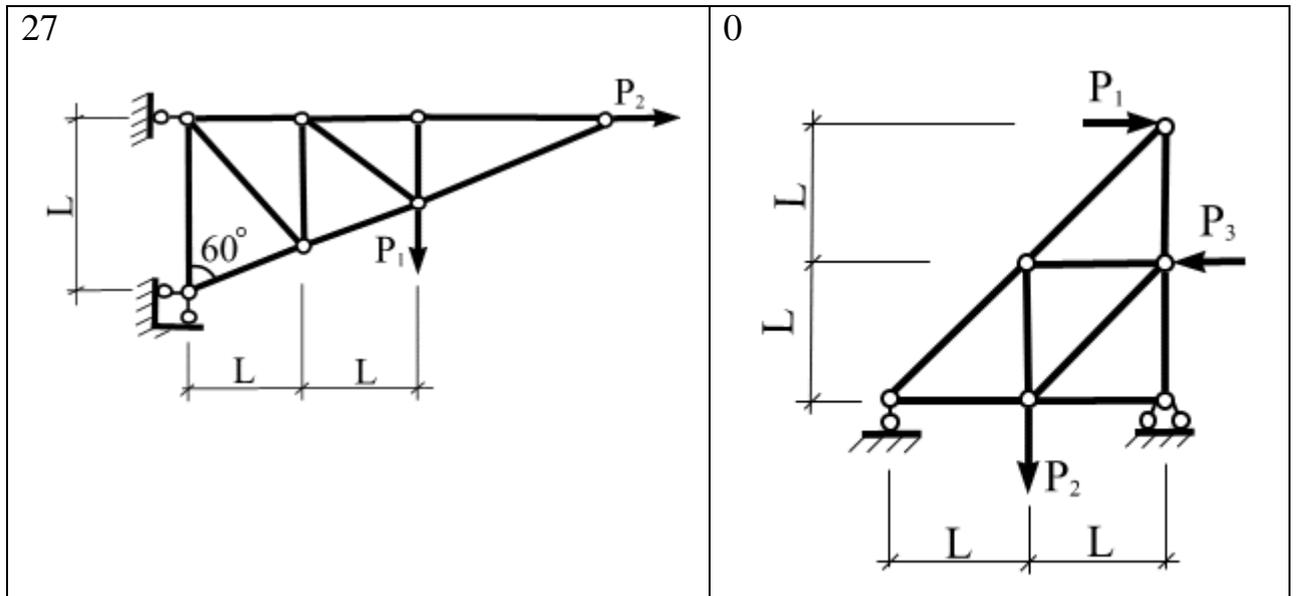
<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>

<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>10</p>
<p>11</p>	<p>12</p>
<p>13</p>	<p>14</p>

Продолжение табл. 14

<p>15</p>	<p>16</p>
<p>17</p>	<p>18</p>
<p>19</p>	<p>20</p>

<p>21</p>	<p>22</p>
<p>23</p>	<p>24</p>
<p>25</p>	<p>26</p>



Задача 3. Составные конструкции

Для составной конструкции требуется:

- вычислить реакции опор;
- вычислить давление на врезанный шарнир С;
- проверить полученные результаты.

Исходные данные приведены в табл. 15, схемы – в табл. 16.

Номер строки в табл. 15 соответствует последней цифре номера зачетной книжки (e), а номер рисунка в табл. 16 соответствует сумме последних трёх цифр номера зачетной книжки ($z+d+e$).

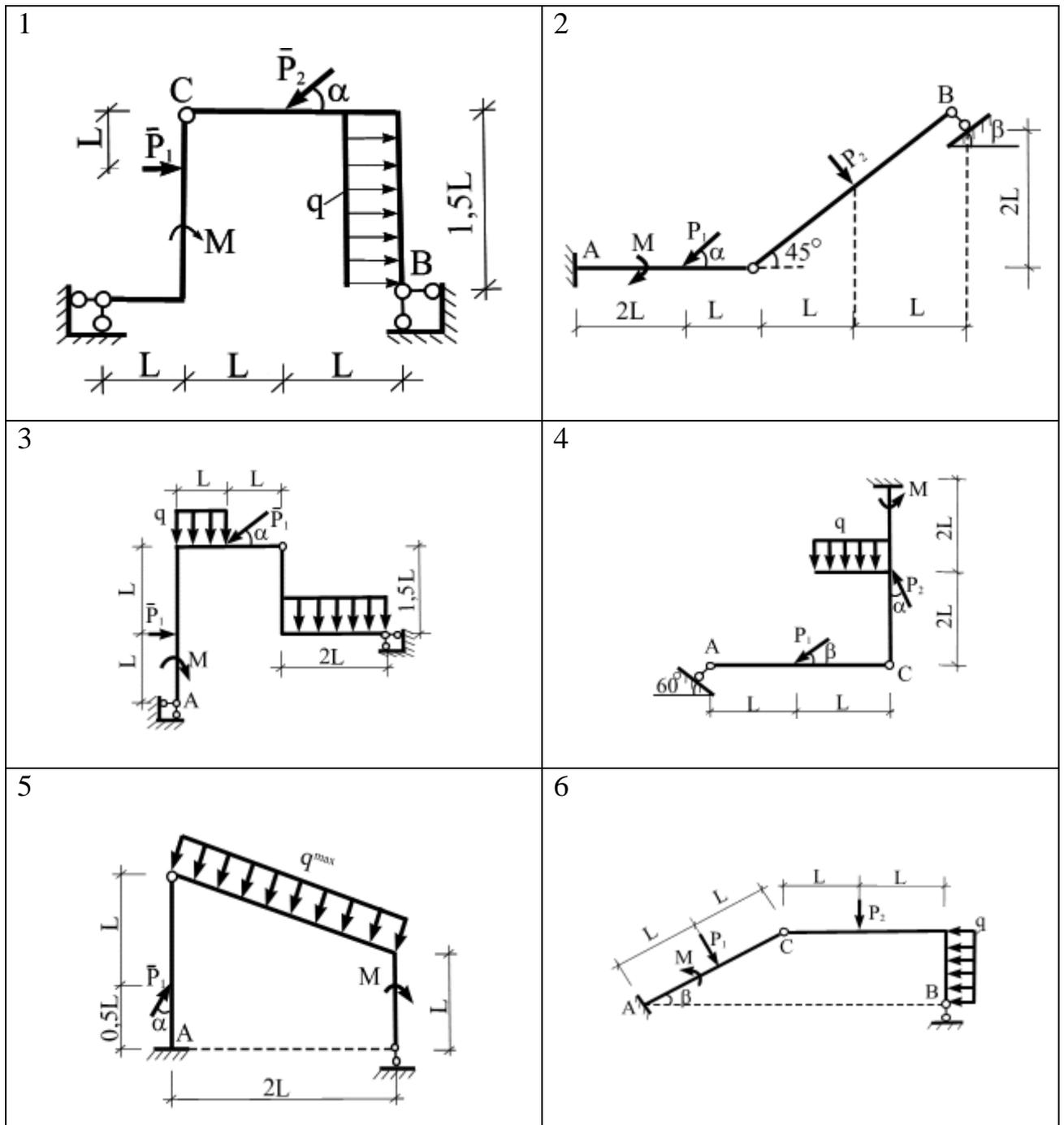
Таблица 15

№ строки	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН м	q , кН/м	L , м	α , гр.	β , гр.
1	10	21	9	5	2	30	60
2	12	20	7	4	2	45	30
3	13	22	6	6	3	60	45
4	15	23	9	3	2	30	60
5	14	25	8	7	3	45	30
6	17	24	11	8	2.5	60	45
7	16	27	12	4	2.5	30	60

Окончание табл.15

№ строки	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН м	q , кН/м	L , м	α , гр.	β , гр.
8	18	26	9	3	2.5	45	30
9	17	25	8	6	2.5	60	45
0	19	24	11	7	2.5	30	60

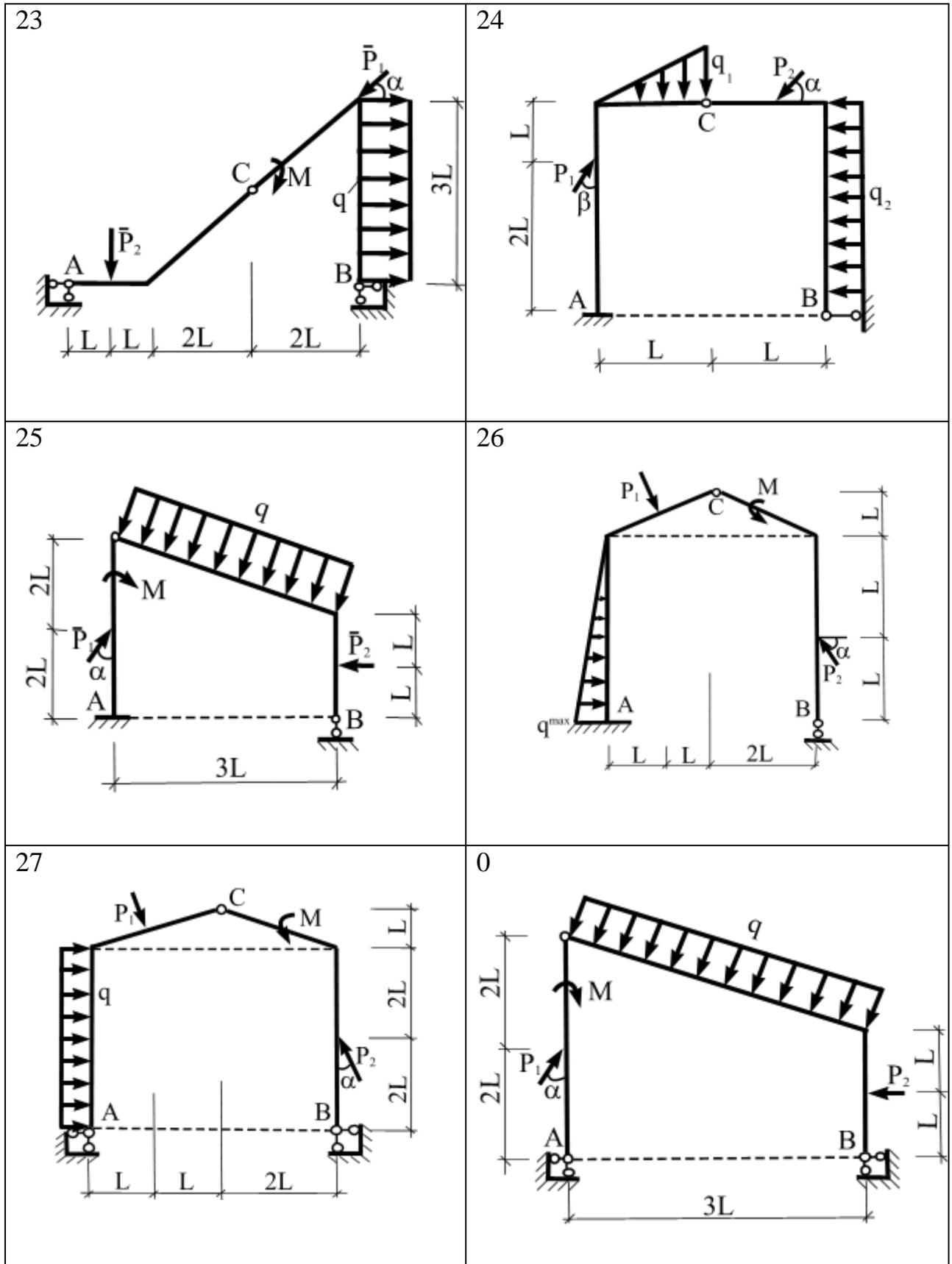
Таблица 16



<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>10</p>
<p>11</p>	<p>12</p>
<p>13</p>	<p>14</p>

Продолжение табл. 16

<p>15</p>	<p>16</p>
<p>17</p>	<p>18</p>
<p>19</p>	<p>20</p>
<p>21</p>	<p>22</p>



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Богомаз, И. В. Теоретическая механика. Том 1. Кинематика. Статика: тексты лекций. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 190 с., 176 илл.
2. Богомаз, И. В. Теоретическая механика. Том 2. Динамика. Аналитическая механика: тексты лекций. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 143 с., 91 илл.
3. Богомаз И. В., Новикова Н. В. Теоретическая механика. Кинематика. Статика: сборник задач. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – 174 с.
4. Богомаз И. В., Воротынова О. В., Новикова Н. В., Чабан Е. А. Теоретическая механика. Динамика. Аналитическая механика: сборник задач. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – 152 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник для вузов: В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1984. – Ч. 1, 2. – 343 с., 423 с.
6. Тарг, С. М. Курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 1995. – 416 с.
7. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Дополнительный

8. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: учебник. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.
9. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: учебник для втузов: В 2 т., Т. 1, 2. – М.: Высш. шк., 1985. – 240 с., 544 с.
10. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1. Статика. Кинематика.: учеб. пособ. для студентов технических вузов. – СПб.: Политехника, 1995. – 670 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Общие указания.....	4
Программа учебного курса «Теоретическая механика».....	5
1. Основы математического аппарата.....	9
1.1. Прямоугольная декартова система координат.....	9
1.2. Графики аналитических функций в декартовой системе координат.....	11
1.3. Элементы тригонометрии.....	14
1.4. Векторы.....	16
1.5. Основы математического анализа.....	21
1.6. Понятие об абсолютно твердом теле и его степенях свободы.....	25
1.7. Инерциальная система отсчета.....	28
2. Кинематика.....	31
2.1. Траектория, скорость, ускорение материальной точки.....	31
2.2. Вращение твердого тела относительно неподвижной точки в плоскости.....	46
2.3. Сложное движение точки.....	55
2.4. Плоскопараллельное движение твердого тела.....	65
3. Статика.....	82
3.1. Основные элементы статики.....	82
3.2. Плоские фермы. Способы расчета.....	98
3.3. Принципы расчета составных конструкций.....	107
Приложение.....	115
Библиографический список.....	176

Учебное издание

**Богомаз Ирина Владимировна
Воротынова Ольга Владленовна**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Кинематика, статика.

Редактор О.А. Лубкина

Корректор

Компьютерная верстка:

Подписано в печать 2011 г. Формат 60x84/16. (А5)

Бумага офсетная. Печать плоская.

Усл. печ. л. 10,6. Уч.-изд. л.

Тираж 200 экз. Заказ №4413

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391) 244-82-31. E-mail rio@sfu-kras.ru
<http://rio.sfu-kras.ru>

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а