

**Сибирский Федеральный Университет**

# **Сопротивление материалов**

**Методические указания  
к контрольным работам**

**Красноярск**

**СФУ**

**2011**

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

При изучении курса «Сопротивление материалов» студенты знакомятся с существующими методами расчета элементов сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Основным документом, определяющим необходимый объем знаний студентов, является программа курса, составленная на основе государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Процесс овладения студентами знаниями и навыками складывается из самостоятельного изучения соответствующих разделов курса по учебникам и выполнения контрольных работ. Каждый студент обязан отработать цикл лабораторных и практических занятий, защитить контрольные работы и получить допуск к экзамену.

Данные методические указания содержат программу курса сопротивления материалов и вопросы для самопроверки; задачи для контрольных работ и примеры решения задач по каждой теме, причем, их разбор проводится довольно подробно, что должно помочь студенту с минимально затратой времени освоить материал соответствующей темы; некоторые справочные материалы, в частности, таблицы сортамента прокатных профилей.

При подготовке настоящих методических указаний использовались материалы учебных пособий [1 – 2]:

1. Т.П. Мартынова «Сопротивление материалов: учеб. пособие: в 2ч. Ч1 /В.В. Москвичев, И.В. Богомаз/ - Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008 – 176 с.

2. Т.П. Мартынова «Сопротивление материалов: учеб. пособие: в 2ч. Ч2 /В.В. Москвичев, И.В. Богомаз/ - Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008 – 192 с.

# ПРОГРАММА КУРСА

## Тема 1. Основные понятия

Литература: (1, гл. 1 и 2).

Понятия прочности, жесткости и устойчивости конструкций. Основные допущения (гипотезы) курса сопротивления материалов. Основные объекты, изучаемые в курсе сопротивление материалов: брус, пластина, оболочка, массив. Внешние силы и их классификация. Внутренние силы и метод их изучения (метод сечений). Внутренние усилия в поперечном сечении бруса: продольные и поперечные силы, крутящие и изгибающие моменты. Виды простейших нагружений (деформаций) бруса: растяжение и сжатие, сдвиг, кручение, изгиб. Общий порядок построения эпюр внутренних усилий.

Напряжение полное, нормальное и касательное. Интегральные зависимости между внутренними усилиями и напряжениями. Деформации и перемещения. Деформации линейные и угловые (сдвига), абсолютные и относительные, упругие и пластические (остаточные).

### *Вопросы для самопроверки*

1. Что называется бруском и осью бруса? 2. Что собой представляют нагрузки (внешние силы)? 3. Что собой представляют внутренние силы? Как они определяются? 4. Из каких операций складывается метод сечений? 5. Какие внутренние усилия могут возникать в общем случае нагружения? 6. Что называется эпюрой внутреннего усилия и для чего она строится? 7. Что называется напряжением в точке? Единицы измерения напряжения. 8. Какое напряжение называется полным, нормальным, касательным? 9. Что называется деформацией? 10. Какие деформации называются упругими? Остаточными? Абсолютными? Относительными?

## Тема 2. Растяжение и сжатие

Литература: (1, гл. 3).

Центральное растяжение сжатие. Продольные силы и их эпюры.

Напряжения в поперечных сечениях бруса. Напряжения в наклонных сечениях. Закон Гука. Продольные и поперечные деформации бруса. Модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Удлинение (укорочение) бруса. Жесткость при растяжении и сжатии. Перемещения поперечных сечений бруса. Условие жесткости. Потенциальная энергия упругой деформации.

### *Вопросы для самопроверки*

1. Какой вид нагружения бруса называется центральным растяжением?
2. Как строится эпюра продольных сил? 3. Записать формулу нормальных напряжений при растяжении.
4. В чём сущность гипотезы Бернулли? 5. Записать и сформулировать закон Гука.
6. Что называется модулем упругости? 7. Написать формулу для абсолютного удлинения.
8. Что такое относительное удлинение? 9. Что называется коэффициентом Пуассона? 10. Сформулировать закон парности касательных напряжений.
11. Записать условие жёсткости при растяжении.

## Тема 3. Механические свойства материалов при растяжении и сжатии

Литература: (1, гл. 4).

Опытное изучение механических свойств материалов. Диаграммы растяжения и сжатия пластичных материалов ( $F - \Delta \ell$ ;  $\varepsilon - \sigma$ ). Основные механические характеристики материалов: предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и прочности (временное сопротивление). Особенности деформирования и разрушения пластичных материалов. Разгрузка и повторное нагружение. Наклёп. Характеристики пластичности материала. Понятие об истинной диаграмме.

Диаграммы растяжения и сжатия хрупких материалов. Основные механические характеристики хрупких материалов. Особенности разрушения хрупких материалов при растяжении и сжатии.

Влияние различных факторов на механические характеристики материалов. Понятие о ползучести и релаксации.

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Как строится диаграмма растяжения? 2. Перечислите основные характеристики прочности. 3. Что называется пределом прочности и что пределом упругости, пределом текучести? 4. Перечислите характеристики упругости и пластичности. 5. В чём состоит различие между пластичными и хрупкими материалами? 6. Что такое наклёп?

### **Тема 4. Расчёты на прочность**

Литература: (1, гл. 5).

Основные задачи расчетов на прочность. Метод расчёта по допускаемым напряжениям. Коэффициент запаса прочности. Условие прочности и три вида расчётов на прочность. Метод расчёта по предельным состояниям. Строительные нормы и правила (СНиП). Две группы предельных состояний. Нормативные и расчётные нагрузки. Нормативное и расчётное сопротивление материалов. Условие прочности при растяжении и сжатии и расчёты на прочность.

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Что называется прочностью? 2. Основные задачи расчётов на прочность. 3. Какие напряжения называются опасным, а какие-допустимыми? 4. Что такое коэффициент запаса прочности и от чего он зависит? 5. Как формулируется условие прочности по допускаемым напряжениям? 6. Какой метод применяется для расчёта на прочность строительных конструкций? 7. Какое состояние конструкций называют предельным (опасным)? 8. Охарактеризуйте две группы предельных

состояний? 9. Что такое СНиП? 10. Какие нагрузки называют нормативным и какие - расчётными? 11. С учетом каких нагрузок ведётся расчёт на прочность и каких на жёсткость? 12. Как называются коэффициенты  $\gamma_f, \gamma_m, \gamma_c$ ? Что они учитывают? 13. Запишите условие прочности для растянутого стержня по предельным состояниям. 14. Какие типы задач можно решать с помощью этого условия?

## **Тема 5. Геометрические характеристики плоских сечений**

Литература: (1, гл. 6).

Площадь, статические моменты и центр тяжести сечения. Осевой, полярный и центробежный моменты инерции. Осевые моменты инерции прямоугольника, треугольника, круга. Зависимость между моментами инерции для параллельных осей. Изменение осевых и центробежного моментов инерции при повороте осей. Главные оси и главные моменты инерции. Вычисление моментов инерции сложных сечений. Прокатные профили. Сортамент.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Что такое статический момент площади? 2. По каким формулам находят координаты центра тяжести плоской фигуры? 3. Какие оси называются центральными? 4. Охарактеризуйте осевой, полярный и центробежный моменты инерции? Какой из них может быть отрицательным? 5. Запишите формулы для вычисления моментов инерции прямоугольного и круглого сечений относительно центральных осей? 6. Как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей? 7. Какие оси называются главными и какие главными центральными? 8. Для каких фигур можно без вычислений установить положение главных центральных осей? 9. По какой формуле определяются главные моменты инерции и угол наклона этих осей?

## Тема 6. Прямой изгиб бруса

Литература: (1, гл. 7).

Изгиб прямого бруса. Виды изгиба. Опоры и опорные реакции. Внутренние усилия в поперечных сечениях бруса: изгибающие моменты и поперечные силы. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Чистый изгиб. Основные допущения. Формула и эпюра нормальных напряжений. Осевой момент сопротивления сечения. Условие прочности по нормальным напряжениям и расчёты на прочность. Рациональное сечение балок. Поперечный изгиб. Формула Журавского для касательных напряжений. Расчёты на прочность при поперечном изгибе.

Определение перемещений (прогибов и углов поворота) при изгибе. Дифференциальное уравнение оси изогнутого бруса и его интегрирование. Граничные условия. Метод начальных параметров. Расчёты балок на жёсткость.

### *Вопросы для самопроверки*

1. Что такое чистый изгиб и что такое поперечный изгиб? 2. Какие типы опор используют для закрепления балок? 3. Каков порядок построения эпюр изгибающих моментом  $M$  и поперечных сил  $Q$ ? 4. Какая зависимость существует между величинами  $M$  и  $Q$ ? 5. Как находят максимальный изгибающий момент? 6. В чём сущность гипотезы плоских сечений? 7. Какая ось называется нейтральной? 8. По каким формулам определяются нормальные и касательные напряжения? 9. Постройте эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения балки. 10. Что называется напряжением? 11. Что называется моментом сопротивления при изгибе?

12. Запишите дифференциальное уравнение упругой линии балки. 13. Каков порядок определения прогиба методом начальных параметров? 14. Что такое начальные параметры? 15. Сформулируйте условие жёсткости при изгибе.

### Тема 7. Сдвиг

Литература: (1, гл. 8).

Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге. Напряжение и деформация при сдвиге. Модуль сдвига  $G$ . Понятие о срезе и смятии. Понятие о расчёте на прочность заклёпочных соединений.

#### Вопросы для самопроверки

1. Какой вид нагружения называется сдвигом? 2. Изобразите элемент в состоянии чистого сдвига. Как изменятся напряжения, если элемент повернуть на 45 градусов? 3. Что называется абсолютным и относительным сдвигом? 4. Как формируется закон Гука при сдвиге? 5. Какие разрушения возможны для заклёпочного соединения? 6. Запишите условие прочности на срез и смятие.

### Тема 8. Кручение

Литература: (1, гл. 8).

Кручение бруса круглого поперечного сечения. Построение эпюр крутящих моментов. Напряжения в поперечных сечениях вала. Полярный момент сопротивления поперечного сечения. Расчёты вала на прочность и жёсткость. Анализ напряженного состояния и разрушения при кручении.

#### Вопросы для самопроверки

1. Что такое кручение? 2. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении? 3. Как найти их величину в произвольной точке поперечного сечения? 4. Что называется моментом сопротивления

при кручении? 5. Чему равен момент сопротивления кольцевого сечения? Почему нельзя сказать, что момент сопротивления кольцевого сечения равен разности моментов сопротивления наружного и внутреннего кругов? 6. По какой формуле вычисляют угол закручивания? 7. Как рассчитывать вал на прочность и на жесткость? 8. Возникают ли при кручении нормальные напряжения?

### **Тема 9. Теория напряжённого состояния и теории прочности**

Литература: (1, гл. 9, 10).

Напряжения в точке. Главные площадки. Главные напряжения. Линейное, плоское и объёмное напряжённое состояние. Формула для определения главных напряжений. Обобщённый закон Гука. Хрупкое и вязкое разрушение. Предельное состояние материала. Критерий пластичности. Третья и четвертая теории прочности. Теория прочности Мора.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Какие виды напряжённого состояния в точке вы знаете? 2. Какие площадки называются главными? 3. Какие напряжения называются главными и какие значения они принимают? 4. Как определяются величина главных напряжений и положение главных площадок? 5. Какие теории прочности вы знаете?

### **Тема 10. Сложное сопротивление**

Литература: (2, гл. 1).

Характерные случаи сложного сопротивления бруса: косоугольный изгиб, внецентренное действие продольной силы, изгиб с кручением. Нормальные напряжения при косоугольном изгибе. Нейтральная линия. Подбор сечения при косоугольном изгибе. Определение прогибов. Нормальные напряжения при внецентренном растяжении и сжатии. Расчёты на прочность. Ядро сечения. Изгиб с кручением. Проверка прочности с применением различных теорий прочности.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой случай изгиба называется косым изгибом? 2. Возможен ли косой изгиб при частном изгибе? 3. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе? 4. Как установить положение нейтральной линии при косом изгибе? 5. Как пройдёт нейтральная линия, если плоскость действия сил совпадает с диагональной плоскостью балки прямоугольного сечения. 6. Как определяют деформации при косом изгибе? 7. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косой изгиб? 8. Как находят напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии? 9. Каково напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии бруса? 10. Какое положение займет нейтральная линия, если продольную силу приложить к вершине ядра сечения? 11. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением? 12. В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением? 13. По каким теориям проверяют прочность стержня из пластичного материала? 14. Какой принцип лежит в основе расчётов на сложное сопротивление? 15. В виде сочетания каких простых нагружений представляют косой изгиб и внецентренное сжатие?

### Тема 11. Устойчивость сжатых стержней

Литература: (2, гл. 5).

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Потеря устойчивости. Критическая сила. Устойчивость сжатых стержней в упругой стадии. Формула Эйлера. Понятие о гибкости и приведённой длине стержня. Пределы применимости формулы Эйлера. Потеря устойчивости при напряжениях за пределом пропорциональности. Формула Ясинского. Практический метод расчёта сжатых стержней на продольный изгиб. Условие устойчивости.

## Вопросы для самопроверки

1. В чём суть потери устойчивости сжатым стержнем? 2. Какая сила называется критической? 3. По какой формуле находят критическую силу? 4. Как изменится критическая сила для стойки круглого сечения при уменьшении диаметра в два раза? 5. Как изменится критическая сила при увеличении длины стойки в два раза? 6. Пределы применимости формулы Эйлера? 7. Что называется гибкостью стержня? 8. С помощью какого коэффициента учитывается влияние способа закрепления концов стержня? 9. Привести значения коэффициентов длины для различных случаев закрепления концов стержня. 10. Как найти критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости? 11. Какой вид имеет график критических напряжений? 12. Как с помощью коэффициента  $\varphi$  проверяют стержни на устойчивость? 13. Как подбирают сечение стержня?

## Тема 12. Энергетический метод определения перемещений

Литература: (2, гл. 2).

Формула Максвелла – Мора для плоских стержневых систем. Определение перемещений методом Мора. Способ Верещагина.

## Вопросы для самопроверки

1. Какие два состояния системы нужно рассматривать при вычислении перемещений по формуле Мора? 2. Как изображается единичное состояние для определения линейного и углового перемещения? 3. Как устанавливается истинное направление перемещения? 4. В чём сущность способа Верещагина?

## Тема 13. Расчёт статически неопределимых систем

Литература: (2, гл. 3).

Статически неопределимые системы. Лишние неизвестные. Основная и эквивалентные системы. Канонические уравнения метода сил. Расчёт простейших статически неопределимых систем.

### Вопросы для самопроверки

1. Какие связи называются необходимыми? Сколько их? 2. Какие связи называются лишними? 3. Какие системы называются статически неопределимыми, а какие статически определимыми? 4. В чём заключается сущность метода сил? 5. Что называется основной системой и что эквивалентной? 6. Что означают величины  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1F}$ ? 7. Каков физический смысл канонического уравнения? 8. Какими достоинствами обладают статически неопределимые системы?

### Тема 14. Динамические задачи

Литература: (2, гл. 6).

Понятие о статической и динамической нагрузке. Силы инерции. Принцип Д'Аламбера. Динамический коэффициент. Общая идея расчётов при динамическом нагружении. Напряжения в движущих деталях. Напряжения при ударе. Упругие колебания. Свободные и вынужденные колебания. Частота, период и амплитуда колебаний. Явление резонанса. «Отстройка» от резонанса. Коэффициент нарастания колебаний. Динамический коэффициент. Расчёты на прочность при колебаниях.

### Вопросы для самопроверки

1. Как вычисляются напряжения в деталях при равноускоренном поступательном движении? 2. Что называется динамическим коэффициентом? 3. Как определяется динамический коэффициент при ударе? 4. Как изменится напряжение при продольном ударе в случае увеличения площади поперечного сечения в два раза? 5. Зависит ли напряжение при изгибающем ударе от материала балки? 6. Какие колебания называют свободными, а какие вынужденными? 7. Какие колебания называют механическими? 8. Как вычисляют напряжения при колебаниях? Какое явление называется резонансом? 9. В чём заключается «отстройка» от резонанса?

## **Тема 15. Прочность материалов при переменных напряжениях**

Литература: (2, гл. 7).

Усталость и выносливость материала. Виды усталостного излома. Виды циклов напряжений. Кривая Велера, предел выносливости. Причины усталостных разрушений. Влияние различных факторов (концентрация напряжений, масштабный фактор, качество поверхности детали и др.) на величину предела выносливости. Диаграммы предельных напряжений. Расчёты на прочность при переменных напряжениях.

### **Вопросы для самопроверки**

1. *Что называется усталостью материала, а что – выносливостью?*
2. *Какие бывают циклы напряжений?*
3. *Что называется пределом выносливости и как его найти?*
4. *Какой цикл напряжений называется предельным?*
6. *Какие факторы влияют на усталостную прочность материала?*

После изучения данного курса *необходимо уметь:*

- определять вид нагружения бруса;
- определять внутренние силовые факторы и строить их эпюры для различных видов нагружения бруса;
- определять напряжения при различных видах нагружения бруса;
- производить простые расчёты на прочность и жёсткость при различных видах нагружения бруса;
- определять перемещения при различных видах нагружения бруса;
- рассчитывать сжатые стержни на устойчивость;
- решать простые задачи при динамическом характере нагрузок (учёт сил инерции, удар, колебания).

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

По завершении курса студентам предлагается выполнить контрольные работы.

1. Перечень задач, входящих в контрольные работы, приведён в табл. 1 и 2.

По всем специальностям выполняются четыре контрольные работы (таблица 1).

Таблица 1

Контрольные работы	Задачи	Рекомендуемые сроки выполнения
1 часть № 1	1, 2, 3.	ноябрь
№ 2	4, 5, 6.	декабрь
2 часть № 3	7, 8, 9.	март
№ 4	10, 11, 12.	май

По ускоренной форме подготовки выполняются две контрольные работы (табл. 2).

Таблица 2

Контрольные работы	Задачи	Рекомендуемые сроки выполнения
№ 1	1, 4, 5.	март
№ 2	8, 10, 11.	май

2. Исходные данные для индивидуальных заданий берутся из приводимых далее таблиц в строгом соответствии с личным номером (шифром). Для этого шифр необходимо написать столько раз, чтобы получилось шесть цифр, и под цифрами указать буквы: *a*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*. Тогда цифра над буквой *a* укажет, какую строку следует взять из столбца *a*; цифра над буквой *б* - какую строку следует взять из столбца *б*, и т.д.

Например, при номере «305» шифр нужно написать два раза подряд, а под цифрами указать буквы:

3	0	5	3	0	5
<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>

3. Контрольная работа выполняется на листах формата А4 с полями 5 см для замечаний рецензента. На титульном листе должны быть чётко написаны: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента (полностью), название факультета и специальности, учебный шифр, дата отсылки работы, точный почтовый адрес. Выполненная контрольная работа представляет собой пояснительную записку, включающую текст, расчетные схемы, эскизы и выводы.

4. Перед решением задачи надо написать полностью её условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нем *в числах* все величины, необходимые для расчёта. Реакции опор определяются с помощью уравнений равновесия. Построение эпюр необходимо выполнять тщательно. Эпюры располагаются непосредственно под схемой бруса. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчёт величины должны быть показаны в числах. Необходимо указывать размерности всех величин и подчёркивать окончательные результаты.

5. Студент обязан сохранить до экзамена все выполненные контрольные работы, имеющие пометку рецензента «Зачтена».

Задачи, входящие в контрольные работы, относятся к наиболее важным разделам курса. Приступая к их решению, следует вначале проработать материал соответствующей темы:

- растяжение и сжатие (темы 1 - 4) : задачи 1 – 3;
- геометрические характеристики сечений (тема5): задача 4;
- прямой изгиб бруса (тема6): задачи 5,6;
- сложное сопротивление бруса ( тема 10): задачи 7 – 9;
- устойчивость сжатого стержня (тема 11): задача 10;
- динамическое нагружение (тема 14): задачи 11,12.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

### РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

#### Задача 1

Для бруса прямоугольного сечения (рис. 1) определить несущую способность и вычислить перемещение свободного конца бруса. Исходные данные взять из таблицы 3.

#### Порядок решения задачи 1

1. Вычертить схему бруса и его поперечное сечение.
2. Определить опорную реакцию.
3. Составить для каждого участка бруса аналитическое выражение продольной силы  $N$ .
4. Построить эпюру  $N$  и выявить опасное сечение в растянутой и сжатой части бруса.
5. Исходя из условия прочности на растяжение, определить нагрузку  $q_t$ . Принять расчётное сопротивление материала бруса растяжению равным  $R_t = 80 \text{ МПа}$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .
6. Исходя из условия прочности на сжатие, определить нагрузку  $q_c$ . Принять расчётное сопротивление материала бруса сжатию равным  $R_c = 120 \text{ МПа}$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .
7. Выбрать одно из найденных значений нагрузки  $q_t$  и  $q_c$  в качестве несущей способности бруса.
8. Вычислить перемещение свободного конца бруса. Модуль продольной упругости материала бруса  $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Таблица 3

Номер строки	Схема бруса рис.1	$\ell$ , м	$b$	$h$	Номер строки	Схема бруса рис.1	$\ell$ , м	$b$	$h$
			см					см	
1	1	0,5	10	15	6	6	0,7	14	22
2	2	0,8	12	14	7	7	1,2	17	20
3	3	1,0	15	16	8	8	0,6	16	18
4	4	0,9	18	14	9	9	0,5	22	24
5	5	0,6	20	10	0	0	0,9	15	22
	$e$	$\delta$	$z$	$e$		$e$	$\delta$	$z$	$e$

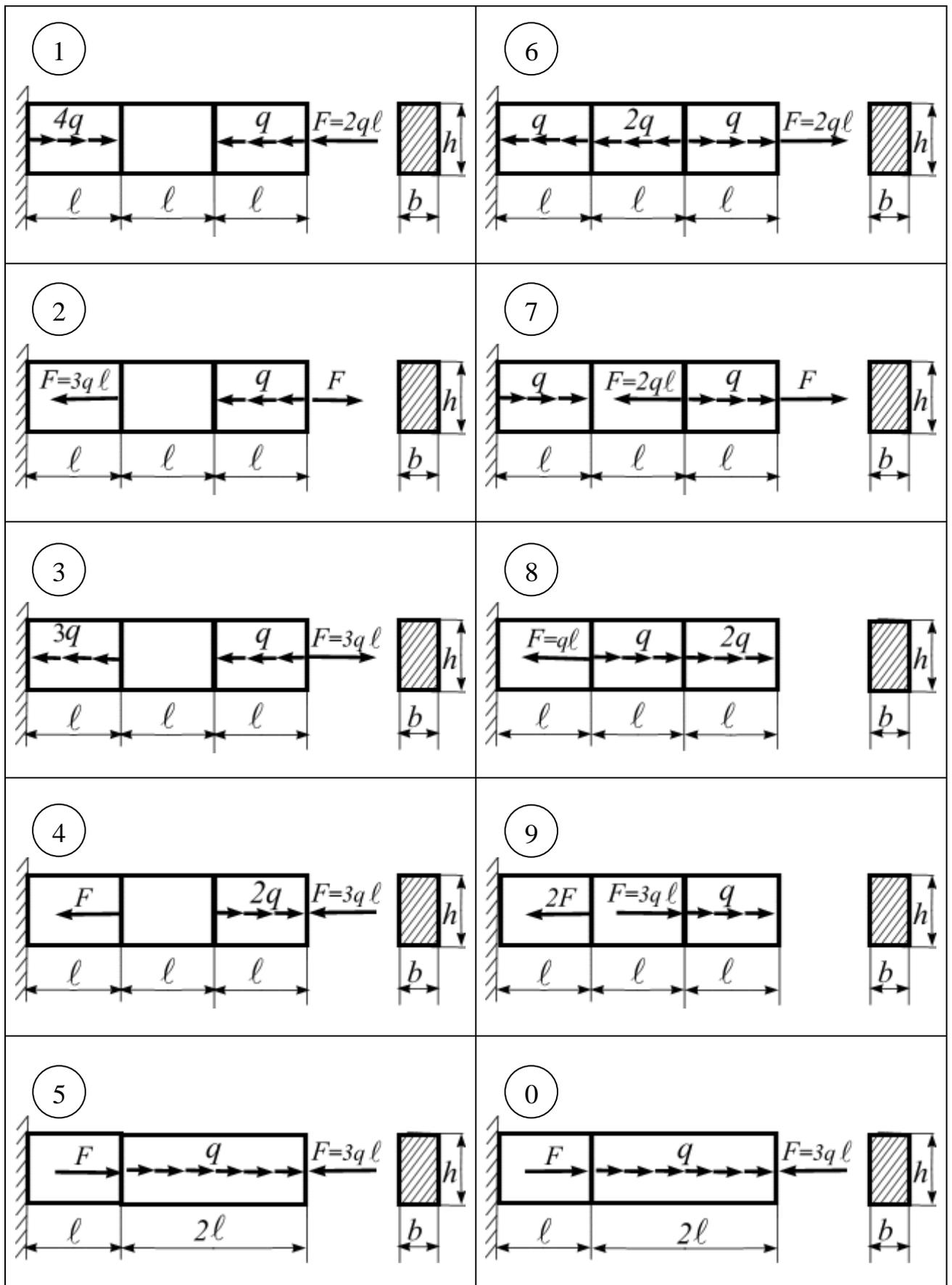


Рис.1

**Пример 1.** Брус прямоугольного поперечного сечения ( $b \times h$ ), один конец которого жёстко заделан, нагружен равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$ ,  $2q$  и силой  $F = 2q$  (рис. 2,а).

*Требуется:*

1. Определить реакцию опоры.
2. Построить эпюру продольных сил  $N$ .
3. Определить несущую способность бруса  $q$ .
4. Вычислить перемещение  $\Delta \ell$  свободного конца бруса.

Дано:  $\ell = 0,5$  м;  $b = 10$  см;  $h = 15$  см; расчётное сопротивление материала растяжению  $R_t = 80$  МПа, сжатию –  $R_c = 120$  МПа. Коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ . Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

*Решение*

1. *Определение реакции заделки.* Составим уравнение равновесия (рис. 2,а):

$$\sum Z = 0, \quad H + 4q\ell - F + q\ell = 0, \quad H = 3q\ell.$$

2. *Построение эпюры продольных сил  $N$ .* Данный брус имеет три участка. Проведём произвольные сечения  $z$  на каждом участке. Рассматривая отсечённые части в состоянии равновесия (рис. 2, б-г), запишем аналитические выражения для продольной силы.

$$\text{I участок,} \quad 0 \leq z_1 \leq \ell,$$

$$\sum Z = 0, \quad -N_1 + qz_1 = 0, \quad N_1 = qz_1.$$

На этом участке продольная сила изменяется по линейному закону: при  $z_1 = 0$ ,  $N_1 = 0$ ; при  $z_1 = \ell$ ,  $N_1 = q\ell$  (сила растягивающая).

$$\text{II участок,} \quad 0 \leq z_2 \leq \ell,$$

$$\sum Z = 0 \quad -N_2 - F + q\ell = 0, \quad N_2 = -q\ell.$$

На втором участке продольная сила постоянна и отрицательна.

$$\text{III участок,} \quad 0 \leq z_3 \leq 2\ell$$

$$\sum Z = 0, \quad -N_3 + 2q \cdot z_3 - F + q\ell = 0, \quad N_3 = -q\ell + 2q \cdot z_3.$$

На этом участке величина продольной силы изменяется линейно:  
 при  $z_3 = 0$ ,  $N_3 = -ql$  (сжатие); при  $z_3 = 2l$ ,  $N_3 = 3ql$  (растяжение).

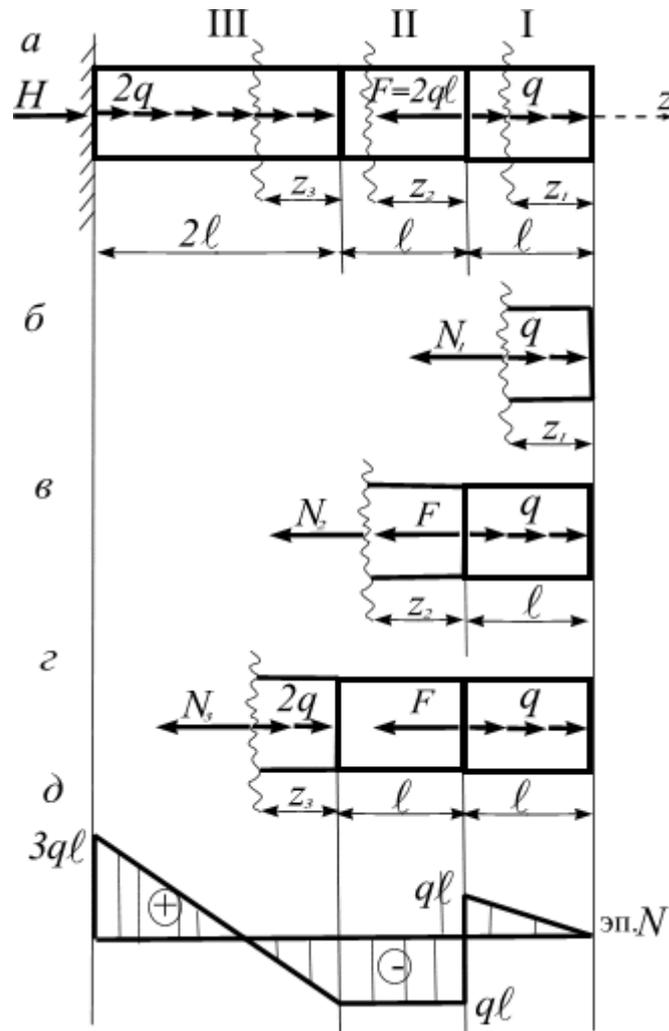


рис. 2

По найденным значениям  $N$  строим эпюру (рис. 2,  $\delta$ ), откладывая положительные значения выше базисной линии, отрицательные – ниже.

3. *Определение несущей способности бруса.* Несущую способность бруса найдём из условия прочности для опасного сечения - сечения, в котором нормальные напряжения достигают максимального абсолютного значения:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \gamma_c \cdot R,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения, постоянная по всей длине бруса. Поэтому опасное сечение установим по эпюре  $N$ : в сжатой части бруса – это любое сечение на втором участке, в растянутой – сечение возле заделки.

Найдём нагрузку из условия прочности на *сжатие*:

$$\left| \frac{q\ell}{A} \right| \leq \gamma_c \cdot R_c,$$

откуда  $q_c = \frac{A \cdot \gamma_c \cdot R_c}{\ell} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 120 \cdot 10^6}{0,5} = 3240 \cdot 10^3 \frac{H}{m}$ .

Найдём нагрузку из условия прочности на *растяжение*:

$$\frac{3q\ell}{A} \leq \gamma_c \cdot R_t,$$

откуда  $q_t \leq \frac{A \cdot \gamma_c \cdot R_t}{3\ell} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 80 \cdot 10^6}{3 \cdot 0,5} = 720 \cdot 10^3 \frac{H}{m}$ .

Из двух значений  $q_c$  и  $q_t$  в качестве *несущей способности* бруса выбираем наименьшее, т. е.  $q = 720 \text{ кН/м}$ .

4. *Вычисление перемещения свободного конца бруса.* Вычислим абсолютные деформации каждого участка по закону Гука

$$\Delta \ell_i = \int_z \frac{N_i dz}{EA},$$

где  $i$  – номер участка;  $N_i$  – аналитическое выражение продольной силы на нем.

$$\Delta \ell_I = \int_{z_1} \frac{N_1 dz}{EA} = \int_0^\ell \frac{q z_1 \cdot dz}{EA} = \frac{q \ell^2}{2EA}; \quad \Delta \ell_{II} = \int_{z_2} \frac{N_2 dz}{EA} = \int_0^\ell \frac{(-q\ell) \cdot dz}{EA} = -\frac{q \ell^2}{EA};$$

$$\Delta \ell_{III} = \int_{z_3} \frac{N_3 dz}{EA} = \int_0^{2\ell} \frac{(-q\ell + 2qz) \cdot dz}{EA} = \frac{2q \ell^2}{EA}.$$

Перемещение свободного конца бруса найдем как сумму деформаций всех участков:

$$\Delta \ell = \Delta \ell_I + \Delta \ell_{II} + \Delta \ell_{III} = \frac{q \ell^2}{2EA} - \frac{q \ell^2}{EA} + \frac{2q \ell^2}{EA} = \frac{3q \ell^2}{2EA};$$

$$\Delta \ell = \frac{3 \cdot 720 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 150 \cdot 10^{-4}} = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,09 \text{ мм}.$$

*Ответ:* несущая способность бруса  $q = 720 \text{ кН/м}$ ; перемещение свободного конца бруса  $\Delta \ell = 0,09 \text{ мм}$ .

## Задача 2

Для ступенчатого бруса (рис. 3) при заданных нормативных нагрузках требуется подобрать площадь поперечных сечений каждой ступени.

Исходные данные взять из таблицы 4.

### Порядок решения задачи 2

1. Вычислить расчётные значения нагрузок. Принять следующие коэффициенты надёжности для нагрузок:

$$\gamma_f = 1,1 \text{ – для постоянной } (F),$$

$$\gamma_f = 1,4 \text{ – для временной } (q).$$

2. Вычертить расчётную схему бруса и указать на ней численные значения размеров и нагрузок.

3. Определить опорную реакцию.

4. Для каждого участка бруса составить аналитическое выражение продольной силы  $N$  и построить её эпюру.

5. Построить эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ , выразив их через площадь сечения  $A$ . Выявить опасное сечение бруса.

6. Исходя из условия прочности, установить площадь сечения  $A$ . Расчётное сопротивление материала растяжению и сжатию  $R = 240 \text{ МПа}$ ; коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

Таблица 4

Номер строки	Схема бруса рис.3	$\ell$ , м	$q_n$ , кН/м	$F_n$ , кН	Номер строки	Схема бруса рис.3	$\ell$ , м	$q_n$ , кН/м	$F_n$ , кН
1	1	0,5	24	40	6	6	0,9	40	56
2	2	0,6	30	45	7	7	0,5	28	48
3	3	0,4	32	60	8	8	0,8	42	62
4	4	0,8	50	50	9	9	0,4	34	46
5	5	0,7	38	64	0	0	0,7	52	42
	$e$	$d$	$z$	$e$		$e$	$d$	$z$	$e$

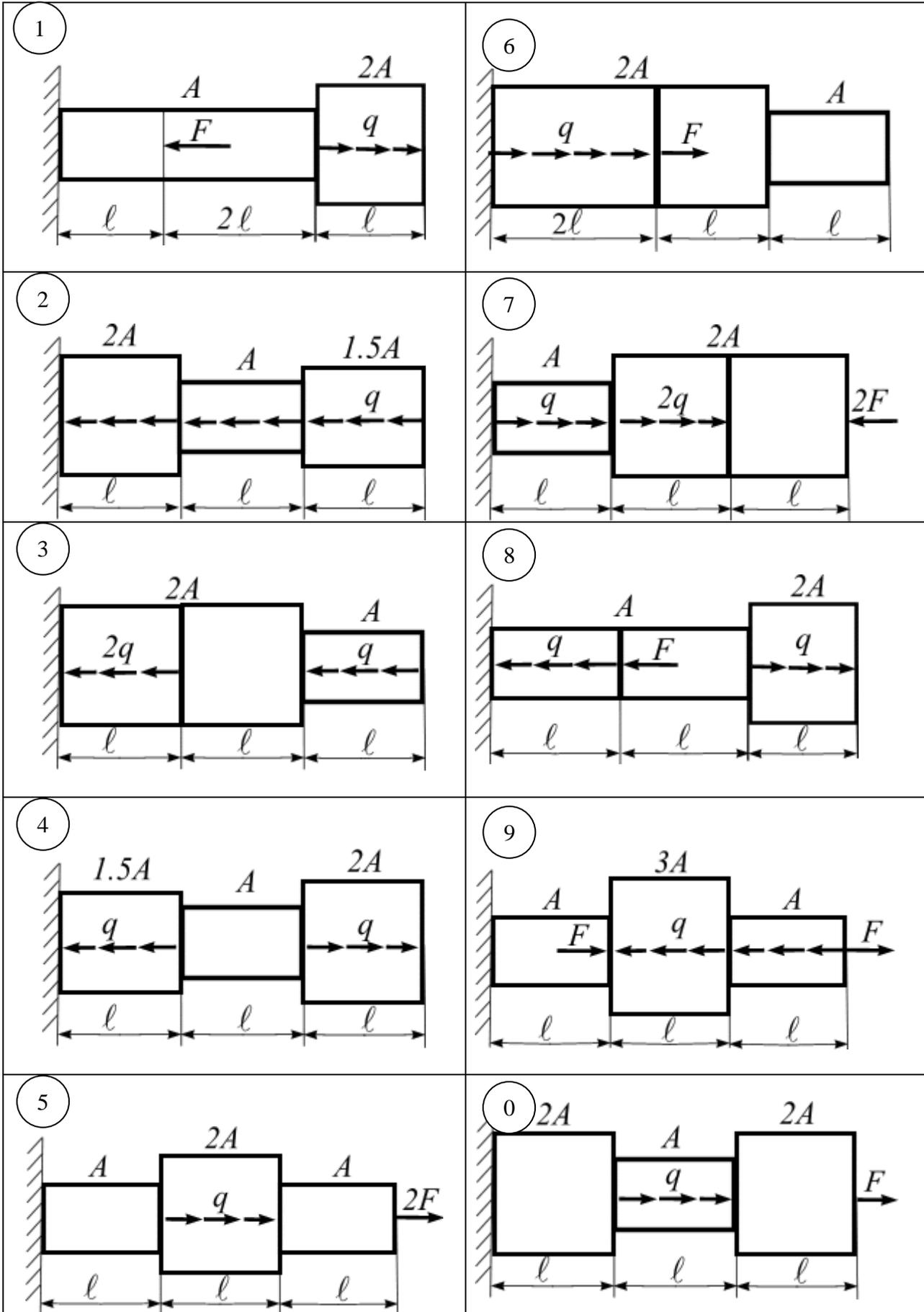


Рис.3

**Пример 2.** Ступенчатый брус (рис. 4,а) нагружен постоянной силой  $F$  и временной равномерно распределённой нагрузкой  $q$ .

*Требуется:*

1. Определить расчётные значения нагрузок.
2. Определить реакцию опоры.
3. Построить эпюру продольных сил.
4. Построить эпюру нормальных напряжений.
5. Определить площади поперечных сечений каждой ступени.

Дано:  $\ell = 0,8$  м; Нормативные нагрузки и соответствующие коэффициенты надёжности по нагрузке:  $F_n = 32$  кН и  $\gamma_t = 1,1$ ;  $q_n = 18$  кН/м и  $\gamma_t = 1,4$ .  
Расчётное сопротивление материала растяжению и сжатию  $R = 240$  мПа, коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

*Решение*

1. Определение расчетных значений нагрузок:

$$F = F_n \cdot \gamma_f = 32 \cdot 1,1 = 35,2 \text{ кН.}$$

$$q = q_n \cdot \gamma_f = 18 \cdot 1,4 = 25,2 \text{ кН/м.}$$

2. Определение реакции жесткой заделки:

$$\sum Z = 0; \quad H - q\ell + 2q\ell - F = 0; \quad H = -q\ell + F = -25,2 \cdot 0,8 + 35,2 = 15,04 \text{ кН.}$$

3. Построение эпюры продольных сил.

Брус имеет три участка. Проведем произвольные сечения  $z$  на каждом участке и запишем аналитические выражения силы.

$$\text{I участок,} \quad 0 \leq z_1 \leq \ell,$$

$$N_1 = -F = -35,2 \text{ кН.}$$

Сила  $N_1$  постоянна и отрицательна.

$$\text{II участок,} \quad 0 \leq z_2 \leq 2\ell,$$

$$N_2 = -F + qz_2,$$

$$\text{при } z_2 = 0, \quad N_2 = -35,2 \text{ кН}; \quad \text{при } z_2 = 2\ell, \quad N_2 = 5,12 \text{ кН.}$$

Сила  $N_2$  изменяется по линейному закону.

III участок,  $0 \leq z_3 \leq \ell$ ,

$$N_3 = -F + 2q\ell - qz_3,$$

при  $z_3=0$ ,  $N_3=5,12 \text{ кН}$ ; при  $z_3=\ell$ ,  $N_3=-15,04 \text{ кН}$ .

Сила  $N_3$  изменяется по линейному закону.

По найденным значениям продольных сил строим эпюру  $N$  (рис. 4,б).

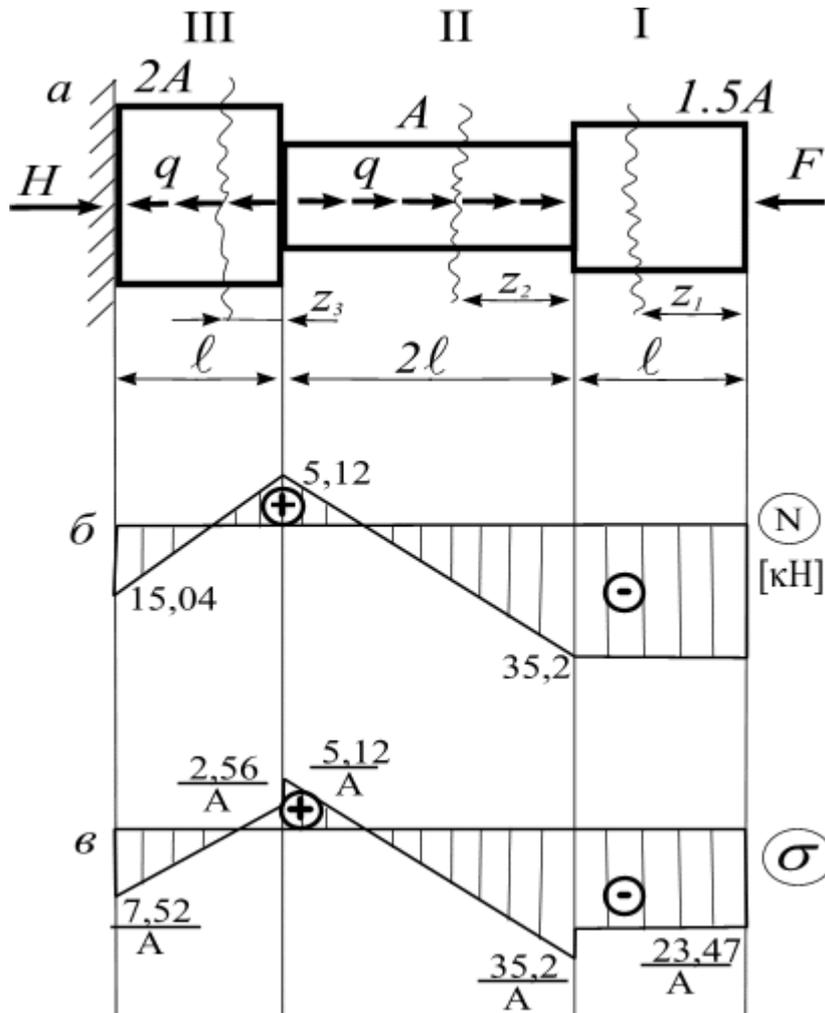


Рис. 4

4. Построение эпюры нормальных напряжений. Нормальные напряжения в

поперечных сечениях определим по формуле  $\sigma = \frac{N}{A}$ , где  $N$  – продольная сила

в сечении;  $A$  – площадь сечения.

I участок,  $0 \leq z_1 \leq \ell$ ,

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-35,2}{1,5A} = -\frac{23,47}{A}.$$

На этом участке напряжение постоянное и отрицательное.

II участок,  $0 \leq z_2 \leq 2l$ ,

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-F + qz_2}{A};$$

$$\text{при } z_2=0, \quad \sigma_2 = -\frac{35,2}{A}; \quad \text{при } z_2=2l, \quad \sigma_2 = \frac{5,12}{A}.$$

Напряжение изменяется по линейному закону.

III участок,  $0 \leq z_3 \leq l$ ,

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{-F + 2ql - qz_3}{2A};$$

$$\text{при } z_3=0, \quad \sigma_3 = \frac{5,12}{2A} = \frac{2,56}{A}; \quad \text{при } z_3=l, \quad \sigma_3 = -\frac{15,04}{2A} = -\frac{7,52}{A}.$$

По найденным значениям напряжений на определённых участках строим эпюру  $\sigma$  (рис.4, в). По эпюре  $\sigma$  выявляем опасное сечение, которое находится на границе I и II участков:

$$\sigma_{max} = \left| \frac{35,2 \text{ кН}}{A} \right|.$$

5. *Определение площади поперечных сечений бруса.* Запишем условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{расч}}{A} \leq \gamma_c R,$$

где  $N_{расч}$  – значение продольной силы, найденное с учетом расчётных нагрузок. Условие прочности для опасного сечения имеет вид

$$\left| \frac{35,2}{A} \right| \leq \gamma_c \cdot R,$$

$$\text{отсюда } A \geq \frac{35,2}{\gamma_c \cdot R} = \frac{35,2 \cdot 10^3}{0,9 \cdot 240 \cdot 10^6} = 0,163 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1,63 \text{ см}^2.$$

*Ответ:* Площади сечений ступеней бруса на участках равны:

$$A_1 = 2,45 \text{ см}^2, \quad A_2 = 1,63 \text{ см}^2, \quad A_3 = 3,26 \text{ см}^2.$$

### Задача 3

Абсолютно жёсткий брус  $BC$  (рис.6) поддерживается тремя стержнями и загружен постоянной нагрузкой  $F$  и временной  $q$ . Требуется подобрать размеры поперечных сечений стержней, если первый стержень имеет квадратное сечение, второй – трубчатое, третий состоит из двух равнополочных уголков (рис.5,а-в). Исходные данные взять из таблицы 5.

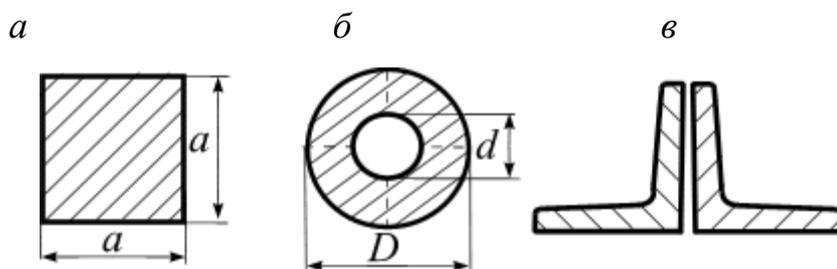


Рис.5

#### Порядок решения задачи 3

1. Вычислить расчётные значения нагрузок. Принять коэффициент надёжности для нагрузок: постоянной  $\gamma_f = 1,1$ ; временной  $\gamma_f = 1,3$ .
2. Вычертить расчётную схему бруса с указанием размеров и нагрузок.
3. Определить усилия в стержнях.
4. Исходя из условия прочности, установить площадь поперечных сечений каждого стержня. Принять расчетное сопротивление материала  $R=210$  МПа, коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

Таблица 5

Номер строки	Схема бруса рис. 6	Угол $\alpha^\circ$	$a, м$	$b, м$	$F_n, кН$	$q_n, \frac{кН}{м}$	$\frac{d}{D}$
1	1	30	0,6	0,8	10	36	0,6
2	2	35	0,7	0,9	50	30	0,65
3	3	40	0,8	0,6	36	50	0,7
4	4	45	0,6	1,2	30	40	0,75
5	5	50	0,5	0,7	20	28	0,8
6	6	55	0,4	0,8	40	25	0,85
7	7	60	0,8	1,5	45	34	0,5
8	8	65	0,9	0,6	56	46	0,4
9	9	70	1,0	1,3	60	42	0,45
0	0	75	1,2	1,1	68	32	0,35
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	<i>в</i>

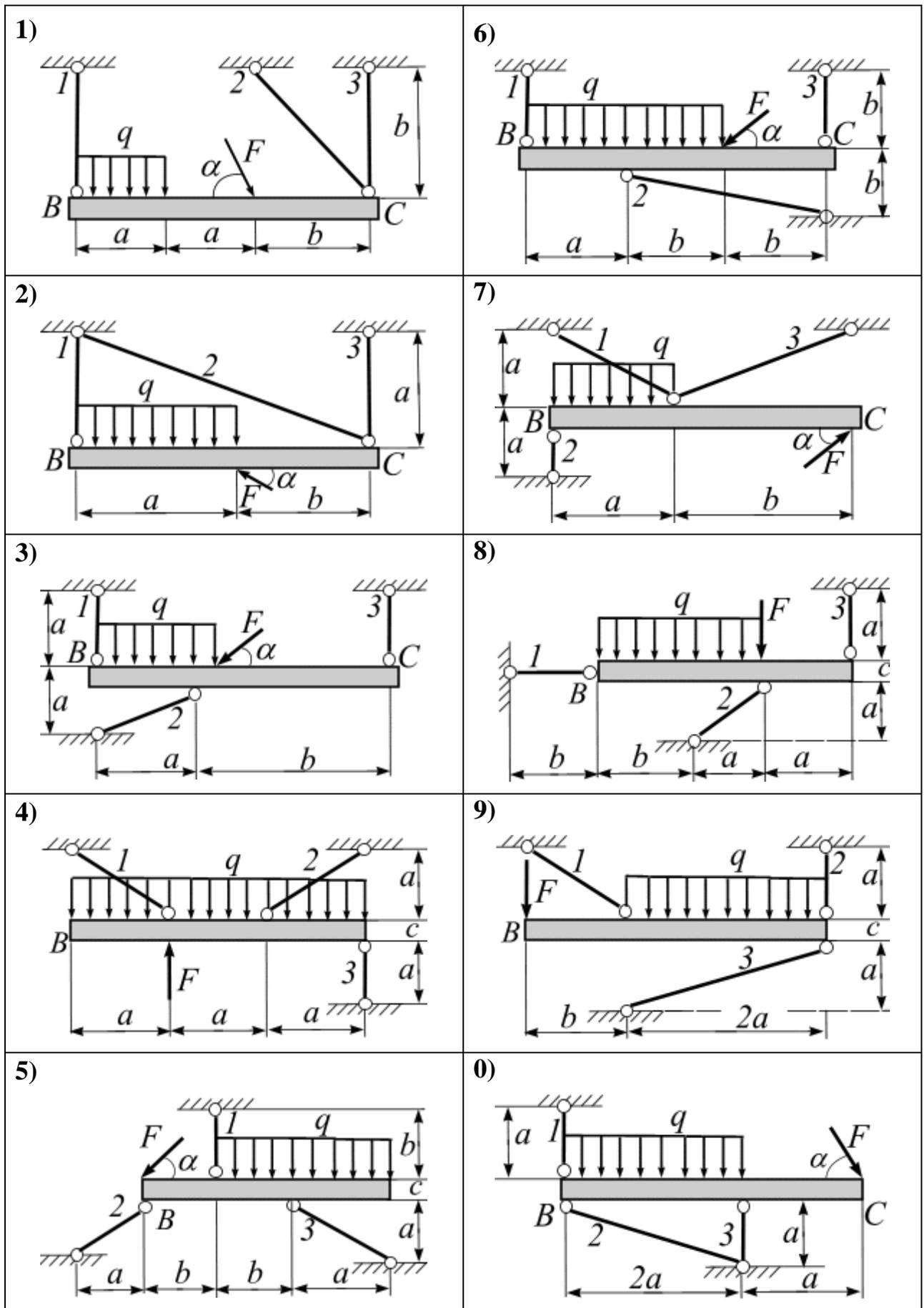


Рис. 6

**Пример 3.** Абсолютно жёсткий брус ВС поддерживается тремя стержнями и загружен заданными нормативными нагрузками (рис.7.а).

Требуется:

1. Вычислить расчётные значения нагрузок.
2. Определить усилия в стержнях.
3. Исходя из условия прочности, установить площади поперечных сечений, учитывая, что первый стержень имеет квадратное сечение, второй – трубчатое, третий состоит из двух равнополочных уголков (рис. 5,а-в).

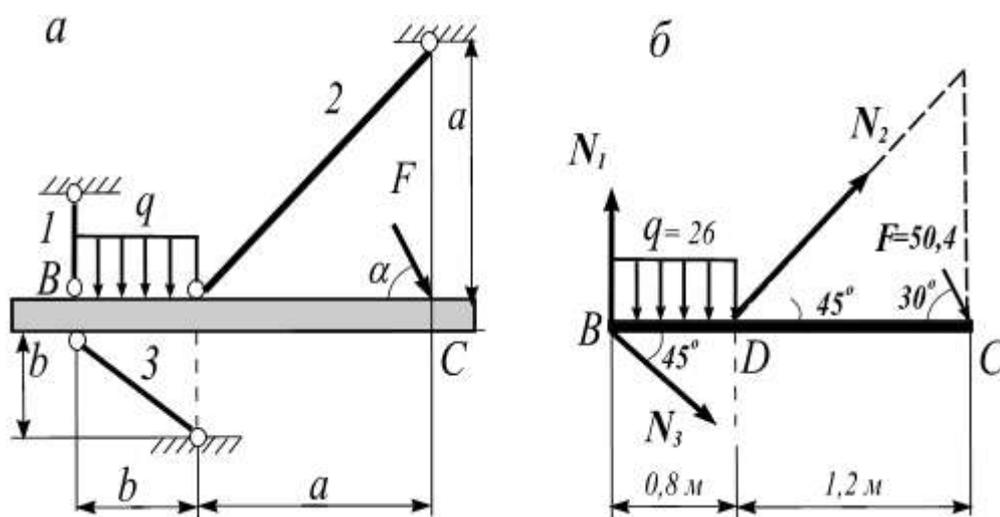


Рис.7

Дано:  $a = 1,2$  м;  $b = 0,8$  м;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\frac{d}{D} = 0,6$ ; нормативные нагрузки и соответствующие коэффициенты надёжности по нагрузке:  $F_n = 42$  кН и  $\gamma_f = 1,2$ ;  $q_n = 20$  кН/м и  $\gamma_f = 1,3$ . Расчетное сопротивление материала растяжению и сжатию  $R = 210$  МПа, коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

Решение

1. Вычисление расчётных значений нагрузок:

$$F = F_n \cdot \gamma_f = 42 \cdot 1,2 = 50,4 \text{ кН};$$

$$q = q_n \cdot \gamma_f = 20 \cdot 1,3 = 26 \text{ кН/м}.$$

2. *Определение усилий в стержнях.* Мысленно рассекаем стержни и заменяем действие «отброшенных» частей продольными силами  $N_1, N_2, N_3$  (рис.7, б). Запишем уравнение равновесия и определим усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} \sum m_B &= 0, \\ -q \cdot 0,8 \cdot 0,4 + N_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 0,8 - F \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 &= 0, \\ N_2 &= 103,8 \text{ кН (стержень растянут)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0, \\ N_3 \cdot \cos 45^\circ + N_2 \cdot \cos 45^\circ + F \cdot \cos 30^\circ &= 0, \\ N_3 &= -165,5 \text{ кН (стержень сжат)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum m_D &= 0, \\ -N_1 \cdot 0,8 + q \cdot 0,8 \cdot 0,4 + N_3 \cdot \sin 45^\circ \cdot 0,8 - F \cdot \sin 30^\circ \cdot 1,2 &= 0, \\ N_1 &= -144,45 \text{ кН (стержень сжат)}. \end{aligned}$$

Проверим правильность определения усилий в стержнях. Для этого запишем уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0, \\ N_1 - q \cdot 0,8 - N_3 \cdot \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ - F \cdot \sin 30^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения усилий в это уравнение:

$$\begin{aligned} -144,45 - 26 \cdot 0,8 - 165,5 \cdot 0,707 + 103,8 \cdot 0,707 - 50,4 \cdot 0,5 &= 0 \\ -190,45 + 190,44 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Усилия найдены верно.

3. *Определение площадей поперечных сечений стержней.* Условие прочности при растяжении и сжатии:

$$\sigma = \frac{N_{расч}}{A} \leq \gamma_c \cdot R,$$

откуда

$$A \geq \left| \frac{N_{расч}}{\gamma_c \cdot R} \right|.$$

Первый стержень (рис. 5,а) должен иметь площадь

$$A_1 = \left| \frac{N_1}{\gamma_c \cdot R} \right| = \frac{144,4 \cdot 10^3}{0,9 \cdot 210 \cdot 10^6} = 0,764 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,64 \text{ см}^2$$

Однако площадь сечения стержня в виде квадрата  $A_1 = a^2$ , откуда сторона квадрата

$$a = \sqrt{7,64} = 2,76 \text{ см}.$$

Площадь сечения второго стержня (рис. 5,б):

$$A_2 = \frac{N_2}{\gamma_c \cdot R} = \frac{103,8 \cdot 10^3}{0,9 \cdot 210 \cdot 10^6} = 0,549 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 5,49 \text{ см}^2.$$

Площадь кольца:

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right] = 0,5 D^2,$$

откуда наружный диаметр составляет

$$D = \sqrt{\frac{A_2}{0,5}} = \sqrt{\frac{5,49}{0,5}} = 3,3 \text{ см},$$

$$\text{тогда } d = 0,6 D = 1,98 \text{ см}.$$

Площадь сечения третьего стержня (рис. 5,в) из двух уголков составляет

$$A_3 = \left| \frac{N_3}{\gamma_c \cdot R} \right| = \frac{165,5 \cdot 10^3}{0,9 \cdot 210 \cdot 10^6} = 0,876 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 8,76 \text{ см}^2.$$

Площадь одного уголка :

$$A^L = \frac{8,27}{2} = 4,38 \text{ см}^2.$$

Из табл. 3 приложения выбираем уголок в соответствии с найденной площадью:

$$5,6 \times 56 \times 4 \text{ с площадью } A = 4,38 \text{ см}^2.$$

*Ответ:* Размеры поперечных сечений стержней: первого  $a=2,76 \text{ см}$ ; второго  $D=3,3 \text{ см}$ ,  $d=1,98 \text{ см}$ ; третьего из двух уголков  $5,6 \times 56 \times 4 \text{ см}$ .

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

## Задача 4

Для заданного поперечного сечения (рис. 8), состоящего из двух частей, требуется найти положение главных центральных осей и значения главных центральных моментов инерции. Исходные данные взять из табл. 6.

### Порядок решения задачи 4

1. Выписать из сортамента геометрические характеристики для двутавра, швеллера и уголка, а для полосы – рассчитать по формулам.
2. На миллиметровой бумаге вычертить схему сечения с соблюдением масштаба, указать все размеры в числах и оси.
3. Найти общую площадь сечения.
4. Установить положение его центра тяжести.
5. Определить осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно осей, проходящих через центр тяжести (параллельно полкам).
6. Определить угол наклона главных осей  $U$  и  $V$  к центральным осям. Вычертить главные центральные оси на расчетной схеме.
7. Вычислить моменты инерции относительно главных центральных осей и проверить правильность вычислений.

Таблица 6

Номер строки	Схема сечения рис.8	Швеллер (ГОСТ 8240-89)	Двутавр (ГОСТ 8239-89)	Равнополочный уголок (ГОСТ 8509-86)	Размеры полосы, мм
1	1	14	12	80×80×8	10×120
2	2	16	14	80×80×6	20×160
3	3	18	16	90×90×8	20×180
4	4	20	18	90×90×7	14×200
5	5	22	20	90×90×6	16×220
6	6	24	22	100×100×8	18×220
7	7	27	24	100×100×10	16×240
8	8	30	27	100×100×12	18×260
9	9	33	30	125×125×10	20×280
0	10	36	33	125×125×12	20×300
	$\delta$	$e$	$e$	$e$	$\delta$

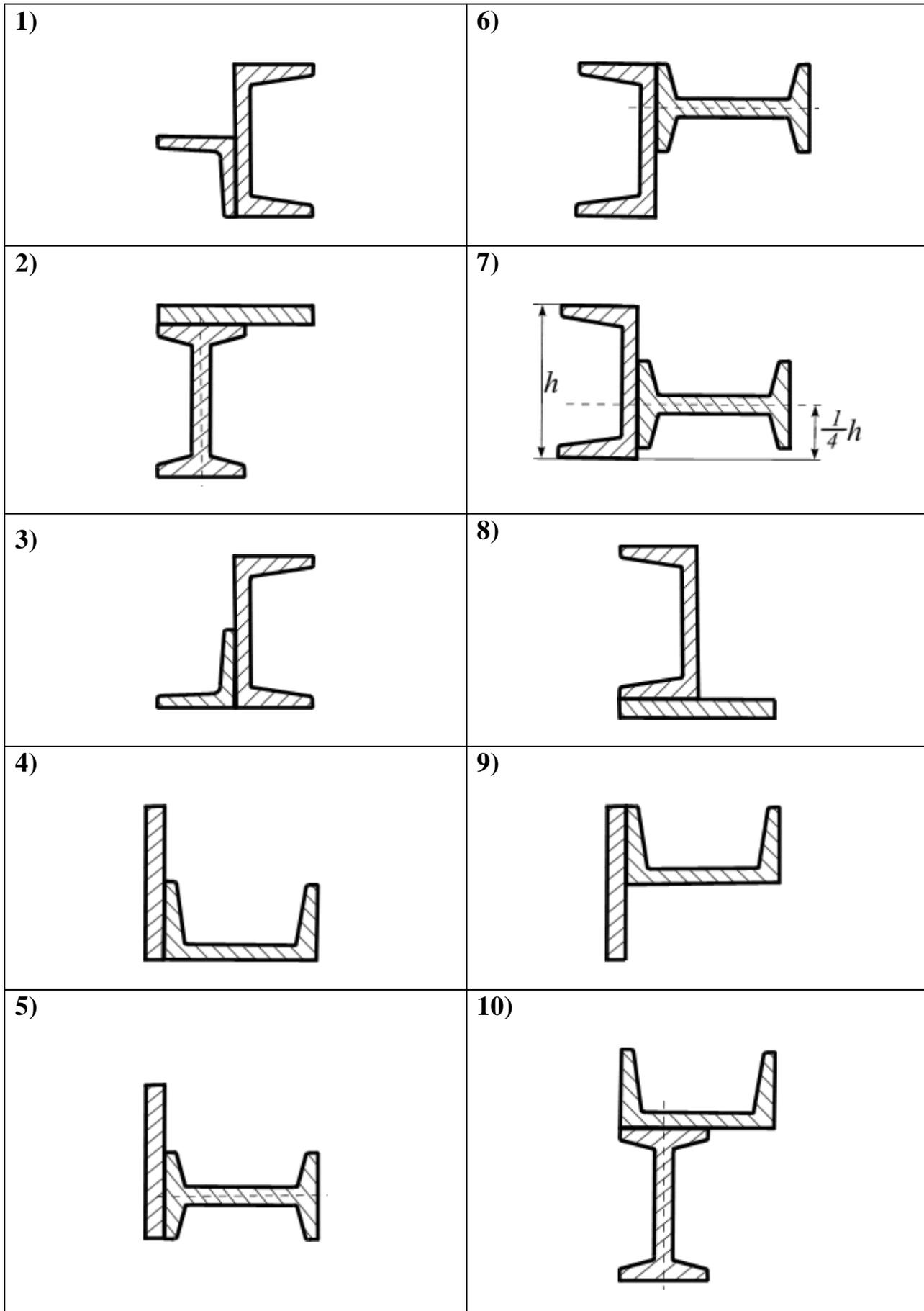


рис. 8

**Пример 4.** Поперечное сечение бруса состоит из швеллера № 20 и равнополочного уголка  $125 \times 125 \times 12$  (рис. 9).

*Требуется:* определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции.

Дано: из табл. 3 приложения находим:

1. Для швеллера № 20:  $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $J_{x_1} = 1520 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 113 \text{ см}^4$ ,  
 $J_{x_1 y_1} = 0$ , координата центра тяжести  $z_o = 2,07 \text{ см}$ ;

2. Для уголка  $125 \times 125 \times 12$ :  $A_2 = 28,9 \text{ см}^2$ ,  $J_{x_2} = J_{y_2} = 422 \text{ см}^4$ ,  
 $J_{x_2 y_2} = 248 \text{ см}^4$ , координата центра тяжести  $z_o = 3,53 \text{ см}$ .

### Решение

1. *Определение положения центра тяжести сечения.* Изображаем данное сечение с соблюдением масштаба и проставляем размеры в сантиметрах (рис. 9). Обозначим центр тяжести первой фигуры (швеллера)  $C_1$  и собственные центральные оси  $x_1$  и  $y_1$ , второй фигуры (уголка) соответственно  $C_2$  и оси  $x_2$   $y_2$ .

Площадь составного сечения:  $A = A_1 + A_2 = 23,4 + 28,9 = 52,3 \text{ см}^2$ .

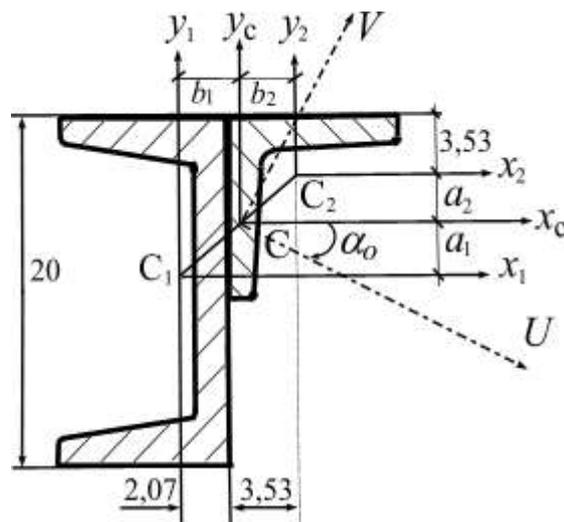


Рис. 9

В качестве вспомогательных осей выбираем оси  $x_1 C_1 y_1$  швеллера (рис. 9). Относительно них статические моменты швеллера равны нулю. Статические моменты заданного сечения относительно осей  $x_1$  и  $y_1$  соответственно равны:

$$S_{x_1} = A_1 \cdot y_{c_1} + A_2 \cdot y_{c_2} = 0 + 28,9 \cdot 6,53 = 187 \text{ см}^3.$$

$$S_{y_1} = A_1 \cdot x_{c_1} + A_2 \cdot x_{c_2} = 0 + 28,9 \cdot 5,07 + 3,53 = 162 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести заданного составного сечения относительно вспомогательных осей  $x_1$  и  $y_1$ :

$$x_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{162}{52,3} = 3,09 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{187}{52,3} = 3,57 \text{ см}.$$

Строим точку  $C$  с координатами  $x_c = 3,09 \text{ см}$  и  $y_c = 3,57 \text{ см}$  (на рис. они не показаны). Центр тяжести  $C$  должен лежать на прямой  $C_1C_2$ , соблюдение этого условия необходимо проверить по рис. 9. Через центр тяжести  $C$  проводим центральные оси  $x_c$  и  $y_c$ , параллельные собственным осям швеллера и уголка. Находим расстояния  $a$  и  $b$  между центральными осями  $x_c$ ,  $y_c$  и собственными осями швеллера  $x_1, y_1$  и уголка  $x_2, y_2$ :

$$\text{для швеллера } a_1 = -3,57 \text{ см}; \quad b_1 = -3,09 \text{ см};$$

$$\text{для уголка } a_2 = 2,9 \text{ см}; \quad b_2 = 2,51 \text{ см}.$$

2. Вычисление осевых и центробежных моментов инерции всего сечения относительно центральных осей  $x_c$  и  $y_c$  по формулам параллельного переноса:

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= J_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{x_2} + a_2^2 \cdot A_2 = \\ &= 1520 + 3,57^2 \cdot 23,4 + 422 + 2,9^2 \cdot 28,9 = 1818 + 665 = 2483 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{y_c} &= J_{y_1} + b_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + b_2^2 \cdot A_2 = \\ &= 113 + 3,09^2 \cdot 23,4 + 422 + 2,51^2 \cdot 28,9 = 336 + 604 = 940 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{x_c y_c} &= J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 = \\ &= 0 + 3,57 \cdot 3,09 \cdot 23,4 + 48 + 2,9 \cdot 2,51 \cdot 28,9 = 258 + 458 = 716 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

3. Определение угла наклона  $\alpha_0$  главных центральных осей  $U$  и  $V$  относительно центральных осей  $x_c$  и  $y_c$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 716}{2483 - 940} = -0,988;$$

$$2\alpha_o = -42^\circ 50'; \quad \alpha_o = -21^\circ 25'.$$

Поскольку угол  $\alpha_o$  отрицательный, главная центральная ось  $U$  откладывается относительно оси  $x_c$  по часовой стрелке, а поскольку  $J_{x_c} > J_{y_c}$ , ось  $U$  является осью, относительно которой момент инерции будет максимальным.

4. Вычисляем главные центральные моменты инерции:

$$J_{u,v} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(J_{x_c} - J_{y_c}\right)^2 + 4J_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{2483 + 940}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2483 - 940)^2 + 4 \cdot 716^2} = 1711,5 \pm 1052,5 \text{ см}^4;$$

$$J_u = J_{\max} = 2764 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{\min} = 659 \text{ см}^4.$$

5. Проверка правильности вычислений. Полученные результаты должны удовлетворять следующим условиям:

А. Главные моменты инерции должны быть экстремальными:

$$J_{\max} > J_{x_c} > J_{y_c} > J_{\min}, \quad 2764 > 2483 > 940 > 659.$$

Если это неравенство не соблюдается, то в решении допущена ошибка.

Б. Сумма моментов инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных центральных осей должна быть постоянной:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_{\max} + J_{\min} = \text{const.}$$

$$2483 + 940 = 2764 + 659, \quad 3423 = 3423.$$

В. Центробежный момент инерции площади заданного сечения относительно главных центральных осей должен равняться нулю.

$$J_{uv} = \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_o + J_{x_c y_c} \cdot \cos 2\alpha_o =$$

$$= \frac{2483 - 940}{2} \cdot 0,68 + 716 \cdot 0,733 = -524,62 + 524,82 \approx 0$$

Ответ: Главные моменты инерции равны  $J_{\max} = 2764 \text{ см}^4$ ,  $J_{\min} = 659 \text{ см}^4$ .

## ПРЯМОЙ ИЗГИБ

### Задача 5

Для консольной балки (рис. 10) требуется из расчёта на прочность определить размеры поперечных сечений для трёх вариантов (рис.11) и вычислить перемещения: прогиб свободного конца балки и угол поворота сечения, находящегося на расстоянии  $2a$  от заделки.

Исходные данные взять из таблицы 7.

#### Порядок расчета задачи 5

1. Вычислить расчётные значения нагрузок, приняв следующие коэффициенты надёжности по нагрузке:

$$\gamma_f = 1,1 \quad - \quad \text{для постоянной } (F_n, M_n),$$

$$\gamma_f = 1,4 \quad - \quad \text{для временной } (q_n).$$

Вычислить расчётное сопротивление материала  $R = R_n / \gamma_m$ , приняв нормативное сопротивление  $R_n = 240 \text{ МПа}$ , коэффициент надёжности по материалу  $\gamma_m$  взять из таблицы 7.

2. Определить реакции жёсткой заделки от *расчётных* и *нормативных* нагрузок.

3. Вычертить расчётную схему балки, указав на ней *численные* значения размеров и расчётных нагрузок.

4. Построить эпюры поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  и выявить опасное сечение балки.

5. Исходя из условия прочности по первому предельному состоянию, найти расчётный момент сопротивления балки  $W_x$ . Принять коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

6. По найденному моменту сопротивления  $W_x$  определить размеры поперечного сечения балки для трёх вариантов. Вычертить полученные сечения в масштабе. Вычислить удельные моменты сопротивления сечения

$W_{y\partial} = W_x / A$  для трех вариантов и по ним установить наиболее рациональное из них.

7. Для данной балки записать универсальные уравнения прогибов и углов поворота по методу начальных параметров.

8. По нормативным нагрузкам вычислить величину прогиба свободного конца балки и угол поворота сечения, находящегося на расстоянии  $2a$  от заделки. Расчет выполнить для балки с наиболее рациональным сечением. Принять модуль продольной упругости материала

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Таблица 7

Номер строки	Схема балки рис. 10	Варианты поперечных сечений рис. 11	$a,$ $м$	$q_n,$ $кН/м$	$F_n,$ $кН$	$m_n,$ $кН \cdot м$	$\gamma_m$
1	1	1, 14, 17	1,0	14	16	20	1,05
2	2	2, 8, 6	1,2	12	14	30	1,10
3	3	3, 10, 12	1,4	16	24	24	1,15
4	4	4, 14, 18	1,8	20	18	26	1,05
5	5	5, 8, 17	1,1	10	12	22	1,15
6	6	7, 9, 12	1,3	24	20	32	1,1
7	7	13, 11, 6	2,0	18	26	34	1,05
8	8	8, 16, 18	1,6	22	22	36	1,15
9	9	15, 2, 17	1,5	15	28	28	1,1
0	0	11, 1, 6	1,7	26	30	40	1,05
	$e$	$\partial$	$z$	$e$	$\partial$	$\bar{b}$	$a$

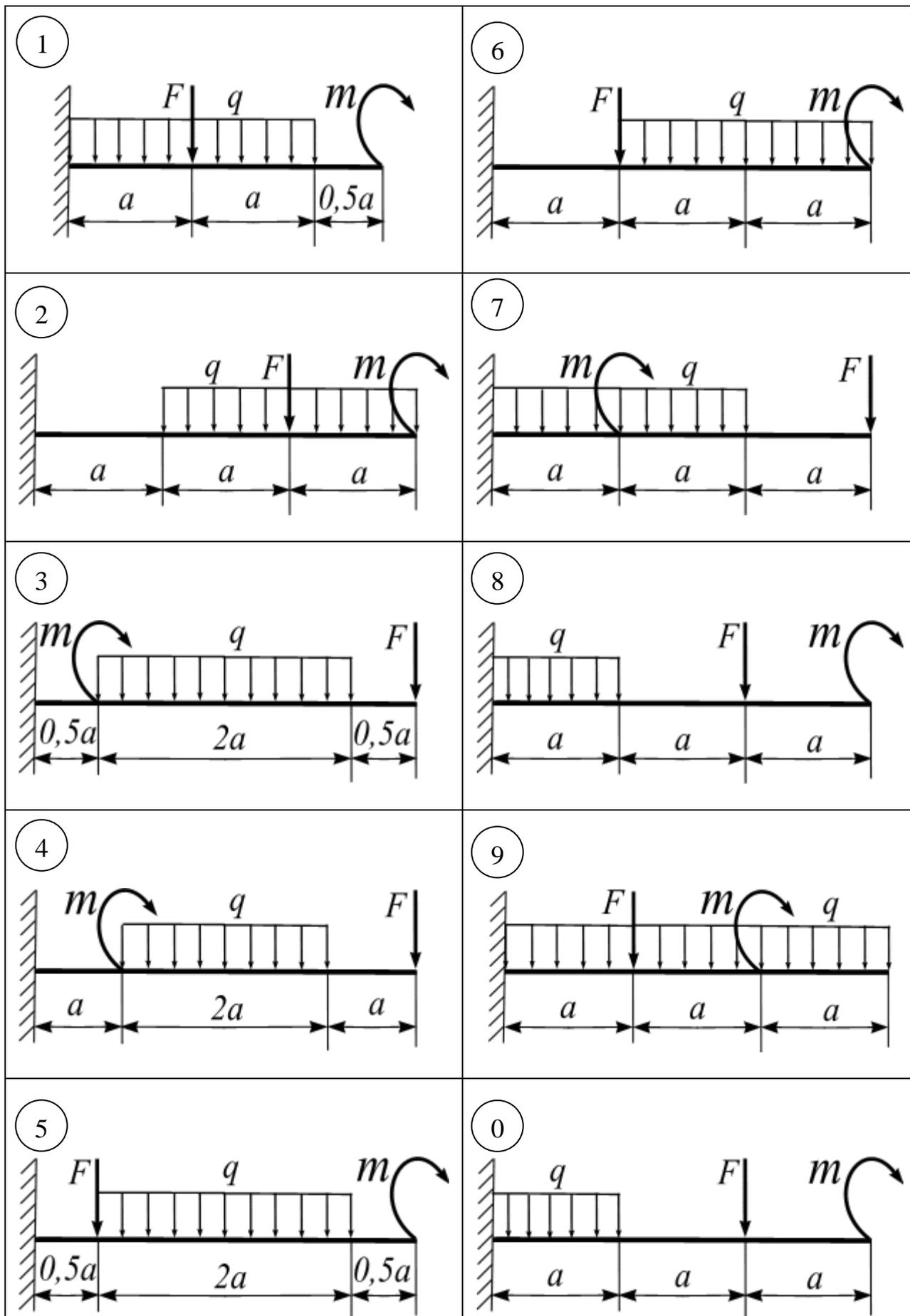


Рис.10

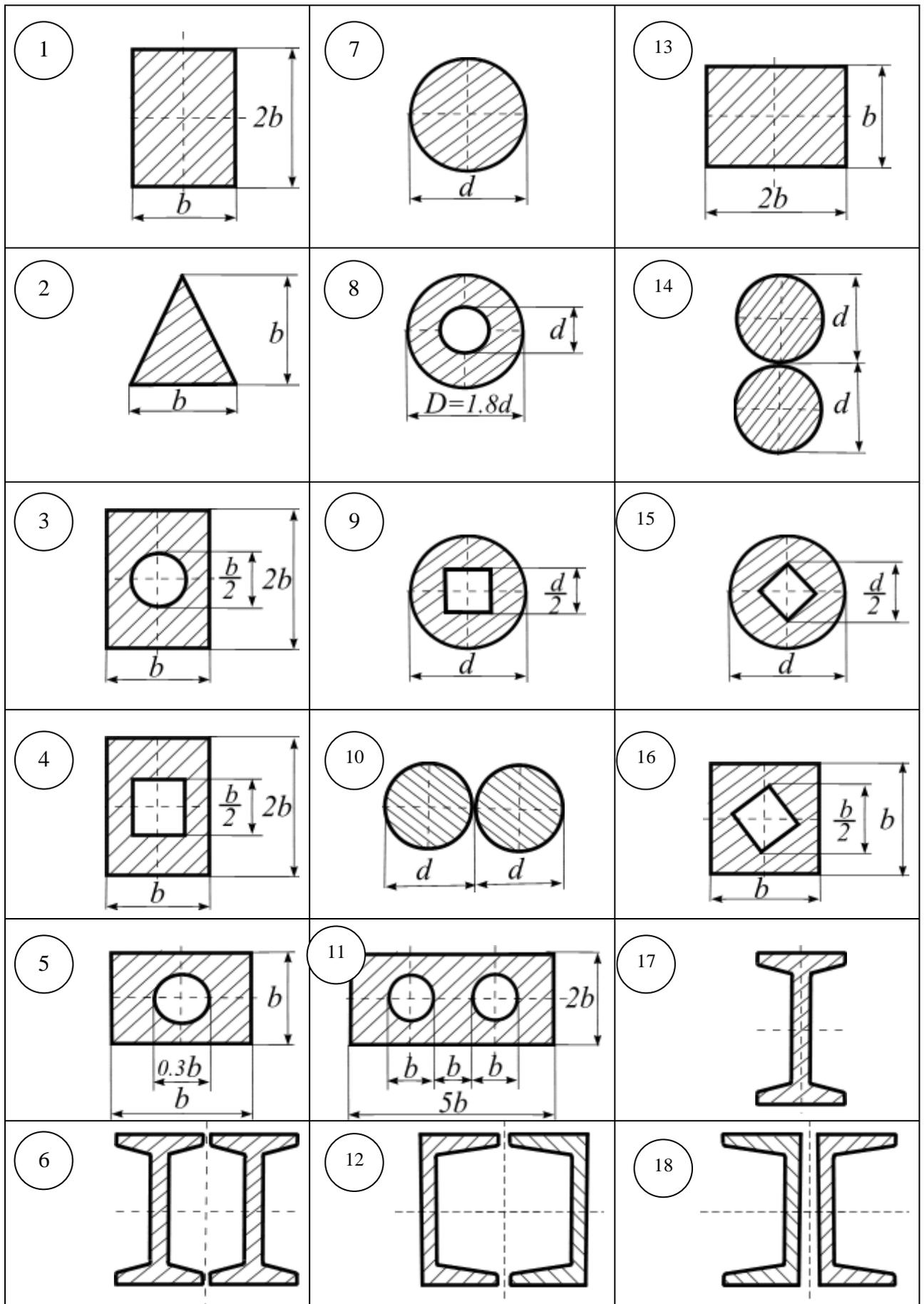


Рис. 11

**Пример 5.** На консольную балку (рис. 13) действует постоянная нагрузка ( $F$  и  $m$ ) и временная равномерно распределённая нагрузка  $q$ .

Требуется:

1. Найти расчётные значения нагрузок и сопротивления материала.
2. Определить реакции жёсткой заделки.
3. Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ .
4. Установить размеры поперечных сечений для трёх вариантов (рис.12,  $a$ - $в$ ), исходя из условия прочности по нормальным напряжениям.
5. Вычислить удельный момент сопротивления  $W_{y0} = W_x / A$  полученных сечений и выбрать из них наиболее рациональное.
6. Рассчитать величину прогиба свободного конца балки и угол поворота сечения, находящегося на расстоянии  $2a$  от заделки. Расчет выполнить для балки с наиболее рациональным сечением.

Дано: Размер балки  $a = 1,2$  м. Нормативные нагрузки и соответствующие коэффициенты надёжности  $\gamma_f$  по нагрузке:

постоянная  $F_n = 20$  кН;  $m_n = 24$  кН·м; -  $\gamma_f = 1,1$ ;

временная  $q_n = 18$  кН/м; -  $\gamma_f = 1,4$ .

Нормативное сопротивление материала изгибу  $R_n = 240$  МПа и коэффициент надёжности по материалу  $\gamma_m = 1,05$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ . Модуль продольной упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Варианты поперечных сечений балки см. на рис. 12.

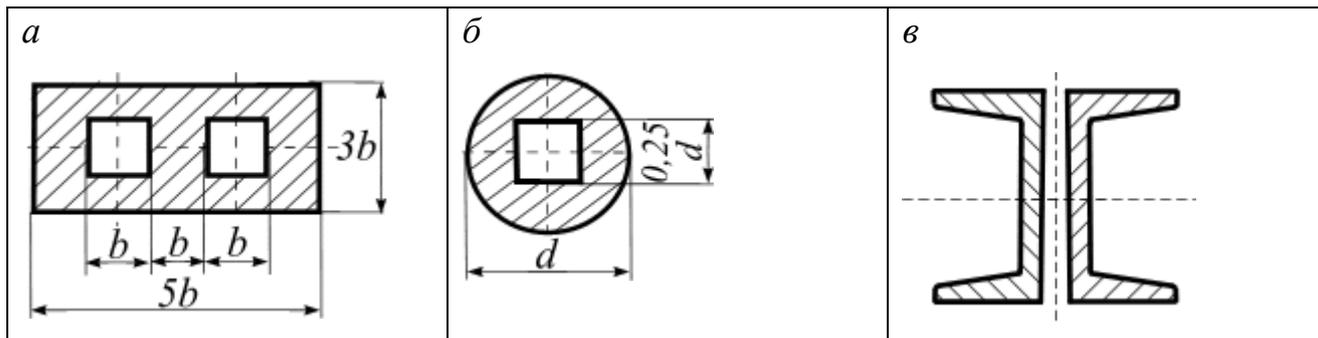


рис.12

## Решение

1. Определение расчётных значений нагрузок и расчётного сопротивления материала  $R$ :

$$F = F_n \cdot \gamma_f = 20 \cdot 1,1 = 22 \text{ кН},$$

$$m = m_n \cdot \gamma_f = 24 \cdot 1,1 = 26,4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$q = q_n \cdot \gamma_f = 18 \cdot 1,4 = 25,2 \text{ кН} / \text{м}$$

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m} = \frac{240}{1,05} = 228,6 \text{ МПа}.$$

2. Определение реакций жёсткой заделки. Мысленно освободим балку (рис. 13,а) от связей и запишем уравнения равновесия:

$$\sum m_A = 0, \quad m_A - m - 2qa^2 - F \cdot 3a = 0,$$

отсюда момент в заделке

$$m_A = m + 2qa^2 + 3Fa.$$

$$\sum F_y = 0, \quad V_A - 2qa - F = 0, \quad V_A = 2qa + F.$$

Вычислим реакции от расчётных нагрузок:

$$m_A = 26,4 + 2 \cdot 25,2 \cdot 1,2^2 + 3 \cdot 22 \cdot 1,2 = 178,2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$V_A = 2 \cdot 25,2 \cdot 1,2 + 22 = 82,48 \text{ кН}.$$

Реакции от нормативных нагрузок:

$$m_A = 24 + 2 \cdot 18 \cdot 1,2^2 + 3 \cdot 20 \cdot 1,2 = 147,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$V_A = 2 \cdot 18 \cdot 1,2 + 20 = 63 \text{ кН}.$$

3. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от расчётных нагрузок. Разобьём балку на три участка. Проведём на каждом участке произвольные сечения  $z$ . Рассматривая отсечённые части в состоянии равновесия, запишем аналитические выражения  $M_x$  и  $Q_y$  для каждого участка и вычислим их значения в характерных точках.

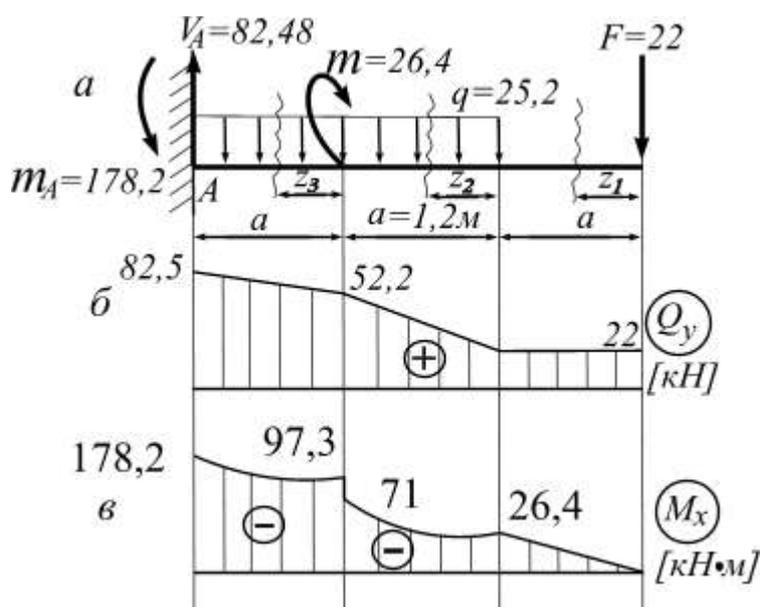
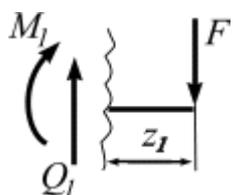


Рис.13

I участок,  $0 \leq z_1 \leq a$



$$M_1 = -F \cdot z_1 \text{ (линейный закон),}$$

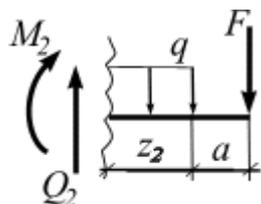
$$\text{при } z_1 = 0, \quad M_1 = 0$$

$$\text{при } z_1 = a, \quad M_1 = -22 \cdot 1,2 = -26,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Поперечную силу найдём, исследуя дифференциальную зависимость:

$$Q_1 = -\frac{dM_1}{dz_1} = F = 22 \text{ кН const.}$$

II участок,  $0 \leq z_2 \leq a$



$$M_2 = -F(a + z_2) - \frac{qz_2^2}{2} \text{ (квадратная парабола),}$$

$$\text{при } z_2 = 0, \quad M_2 = -F \cdot a = -22 \cdot 1,2 = 26,4 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

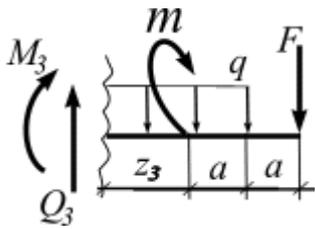
$$\text{при } z_2 = a, \quad M_2 = -2F \cdot a - \frac{qa^2}{2} = -2 \cdot 22 \cdot 1,2 - \frac{25,2 \cdot 1,2^2}{2} = -71 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$Q_2 = -\frac{dM_2}{dz_2} = F + qz_2 \text{ (линейный закон),}$$

$$\text{при } z_2 = 0, \quad Q_2 = F = 22 \text{ кН,}$$

$$\text{при } z_2 = a, \quad Q_2 = F + qa = 22 + 25,2 \cdot 1,2 = 52,2 \text{ кН.}$$

III участок,  $0 \leq z_3 \leq a$



$$M_3 = -F \cdot (a + z_3) - \frac{q \cdot (a + z_3)^2}{2} - m \text{ (квадратичная парабола).}$$

$$\text{при } z_3 = 0, \quad M_3 = -2F \cdot a - \frac{qa^2}{2} - m = -97,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{при } z_3 = a, \quad M_3 = 3F \cdot a - \frac{q(2a)^2}{2} - m = -178,2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$Q_3 = -\frac{dM_3}{dz_3} = F + q \cdot (a + z_3) \text{ - это линейная зависимость:}$$

$$\text{при } z_3 = 0, \quad Q_3 = F + qa = 52,2 \text{ кН,}$$

$$\text{при } z_3 = a, \quad Q_3 = F + 2qa = 82,5 \text{ кН.}$$

По найденным значениям  $M_x$  и  $Q_y$  на каждом участке строим эпюры (рис.13, б,в). Опасное сечение балки находится возле заделки, где  $M_{расч} = |178,2 \text{ кН} \cdot \text{м}|$ .

4. *Определение размеров поперечных сечений.* Запишем условие прочности для опасного сечения по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{расч}}{W_x} \leq \gamma \cdot R,$$

откуда расчётный (требуемый) момент сопротивления сечения составит

$$W_x \geq \frac{M_{расч}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{178,2 \cdot 10^3}{228,6 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = 0,866 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 866 \text{ см}^3.$$

Найдём размеры сечений для трёх вариантов (рис. 12):

**a.** Осевой момент инерции и момент сопротивления данного сечения вычисляются по формулам:

$$J_x = \frac{5b \cdot b^3}{12} - 2 \cdot \frac{b^4}{12} = 11,08 b^4,$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{11,08 b^4}{1,5 b} = 7,39 b^3.$$

Приравняв  $7,39 b^3 = 866 \text{ см}^3$ , найдём размер сечения:

$$b = \sqrt[3]{\frac{866}{7,39}} = 4,89 \text{ см}.$$

Тогда площадь сечения

$$A = 15 b^2 - 2 b^2 = 13 b^2 = 311 \text{ см}^2.$$

**б.** Вычисляем осевой момент инерции и момент сопротивления сечения:

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{(0,25 d)^4}{12} = 0,0487 d^4,$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{0,0487 d^4}{0,5 d} = 0,097 d^3.$$

Приравняв  $0,097 d^3 = 866 \text{ см}^3$ , найдём диаметр:

$$d = \sqrt[3]{\frac{866}{0,097}} = 20,7 \text{ см}.$$

Площадь сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4} - 0,25 d^2 = 0,722 d^2 = 336 \text{ см}^2.$$

**в.** Момент сопротивления одного швеллера:

$$W_x = \frac{866}{2} = 433 \text{ см}^3.$$

Из табл. 2 приложения выбираем швеллер № 33, для которого

$$W_x = 486 \text{ см}^3, \quad A = 46,5 \text{ см}^2, \quad J_x = 7980 \text{ см}^4.$$

5. Вычисление удельных моментов сопротивления полученных сечений:

$$a. \quad W_{y\partial} = \frac{866}{311} = 2,78 ,$$

$$б. \quad W_{y\partial} = \frac{866}{336} = 2,58 ,$$

$$в. \quad W_{y\partial} = \frac{2 \cdot 486}{2 \cdot 46,5} = 10,5 .$$

Наиболее рациональным является сечение балки из двух швеллеров (вариант в), у которого при наименьшей площади осевой момент сопротивления имеет наибольшее значение.

б. Определение прогиба и угла поворота сечения методом начальных параметров. Заметим, что перемещения определяются от нормативной нагрузки. Реакции найдены в п.2.

Поместим начало координат  $O$  на левом конце балки, в заделке (рис.14). Продлим пунктиром линию действия распределённой нагрузки  $q$  до правого конца балки и покажем компенсирующую нагрузку на участке  $CD$ .

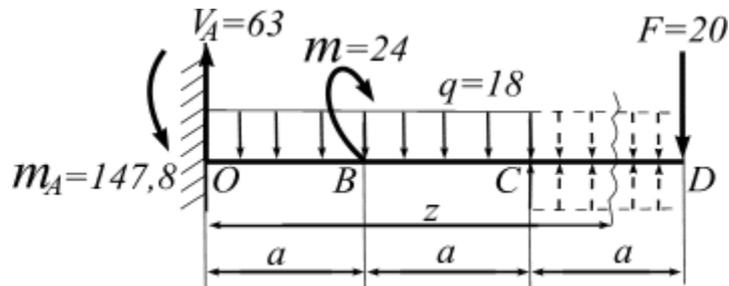


Рис. 14

Очевидно, что начальные параметры равны нулю:

$$y_0 = 0, \quad \theta_0 = 0.$$

Для участка  $CD$  запишем универсальные уравнения прогибов и углов поворота учитывая нагрузки, расположенные левее сечения  $z$ :

$$E J y_z = - m_A \frac{(z-0)^2}{2!} + \frac{V_A (z-0)^3}{3!} - \frac{q (z-0)^4}{4!} + m \frac{(z-a)^2}{2!} + \frac{q (z-2a)^4}{4!}, \quad (1)$$

$$EJ\theta_z = -m_A \frac{(z-0)^1}{1!} + \frac{V_A (z-0)^2}{2!} - \frac{q(z-0)^3}{3!} + m \frac{(z-a)^1}{1!} + \frac{q(z-2a)^3}{3!}. \quad (2)$$

Полагая в уравнении (1)  $z=3a$ , найдём прогиб свободного конца  $D$  балки, состоящей из двух швеллеров № 33:

$$\begin{aligned} EJ y_D &= -m_A \frac{(3a)^2}{2!} + \frac{V_A (3a)^3}{3!} - \frac{q(3a)^4}{4!} + m \frac{(3a-a)^2}{2!} + \frac{q(3a-2a)^4}{4!} = \\ &= -\frac{147,8 \cdot 1,2^2}{2} + \frac{63 \cdot 1,2^3}{6} - \frac{18 \cdot 1,2^4}{24} + \frac{24 \cdot 1,2^2}{2} + \frac{18 \cdot 1,2^4}{24} = -575 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \\ y_D &= -\frac{575}{EJ_x} = -\frac{575 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 7980 \cdot 10^{-8}} = -0,018 \text{ м}. \end{aligned}$$

Знак минус означает, что точка  $D$  переместится вниз.

Полагая в уравнении (2)  $z=2a$  и учитывая слагаемые, соответствующие нагрузкам от начала координат до точки  $C$ , найдём угол поворота сечения:

$$\begin{aligned} EJ\theta_C &= -m_A \frac{(2a)^1}{1!} + \frac{V_A (2a)^2}{2!} - \frac{q(2a)^3}{3!} + m \frac{(a)^1}{1!} = \\ &= -\frac{147,8 \cdot 1,2}{1} + \frac{63 \cdot 1,2^2}{2} - \frac{18(1,2)^3}{6} + \frac{24 \cdot 1,2}{1} = -186 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \\ \theta_C &= -\frac{186}{EJ_x} = -\frac{186 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 7980 \cdot 10^{-8}} = -0,0058 \text{ рад} = -0,33^\circ. \end{aligned}$$

Знак минус означает, что сечение  $C$  повернётся по направлению часовой стрелки.

*Ответ:* Прогиб свободного конца  $y_D = -0,018$  м, угол поворота  $\theta_C = -0,33^\circ$ .

## Задача 6

Для шарнирно–опёртой двутавровой балки (рис. 15), требуется определить несущую способность и проверить прочность балки по касательным напряжениям. Для нагрузок принять соотношения  $M = \alpha q a^2$ ,  $F = \beta q a$ . Исходные данные взять из таблицы 8.

### Порядок решения задачи 6

1. В масштабе вычертить схему балки и её поперечное сечение.
2. С учетом значений коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  выразить нагрузки в долях  $qa$  и проставить их значения на расчётной схеме.
3. Определить реакции опор и проверить их.
4. Составить аналитические выражения  $M_x$  и  $Q_y$  для каждого участка.
5. Построить эпюры поперечной силы  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  и найти их расчётные (наибольшие) значения в буквенном виде.
6. Исходя из условия прочности по нормальным напряжениям, определить расчётную нагрузку  $q$  (несущую способность балки). Принять расчётное сопротивление материала изгибу  $R = 210 \text{ МПа}$ ; коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .
7. Исходя из найденной нагрузки  $q$ , выполнить проверку прочности балки по касательным напряжениям. Принять расчётное сопротивление материала сдвигу  $R_s = 130 \text{ МПа}$ ;  $\gamma_c = 0,9$ .

Таблица 8

Номер строки	Схема балки рис.15	$\ell, m$	Расстояние в долях пролета		Двутавр ГОСТ 8239-89	$\alpha$	$\beta$
			$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$			
1	1	3	1	1	24	1,2	2,0
2	2	4	2	2	33	1,3	2,1
3	3	5	3	3	40	1,4	2,2
4	4	6	4	4	50	1,5	2,3
5	5	7	5	5	55	1,6	2,4
6	6	4	5,5	1	30	1,7	2,5
7	7	3	4,5	2	27	1,8	2,2
8	8	6	3,5	3	45	1,9	2,4
9	9	8	2,5	4	60	2,0	2,3
0	0	5	1,5	5	36	1,6	2,5
	$\partial$	$e$	$\varepsilon$	$\partial$	$e$	$\varepsilon$	$\partial$

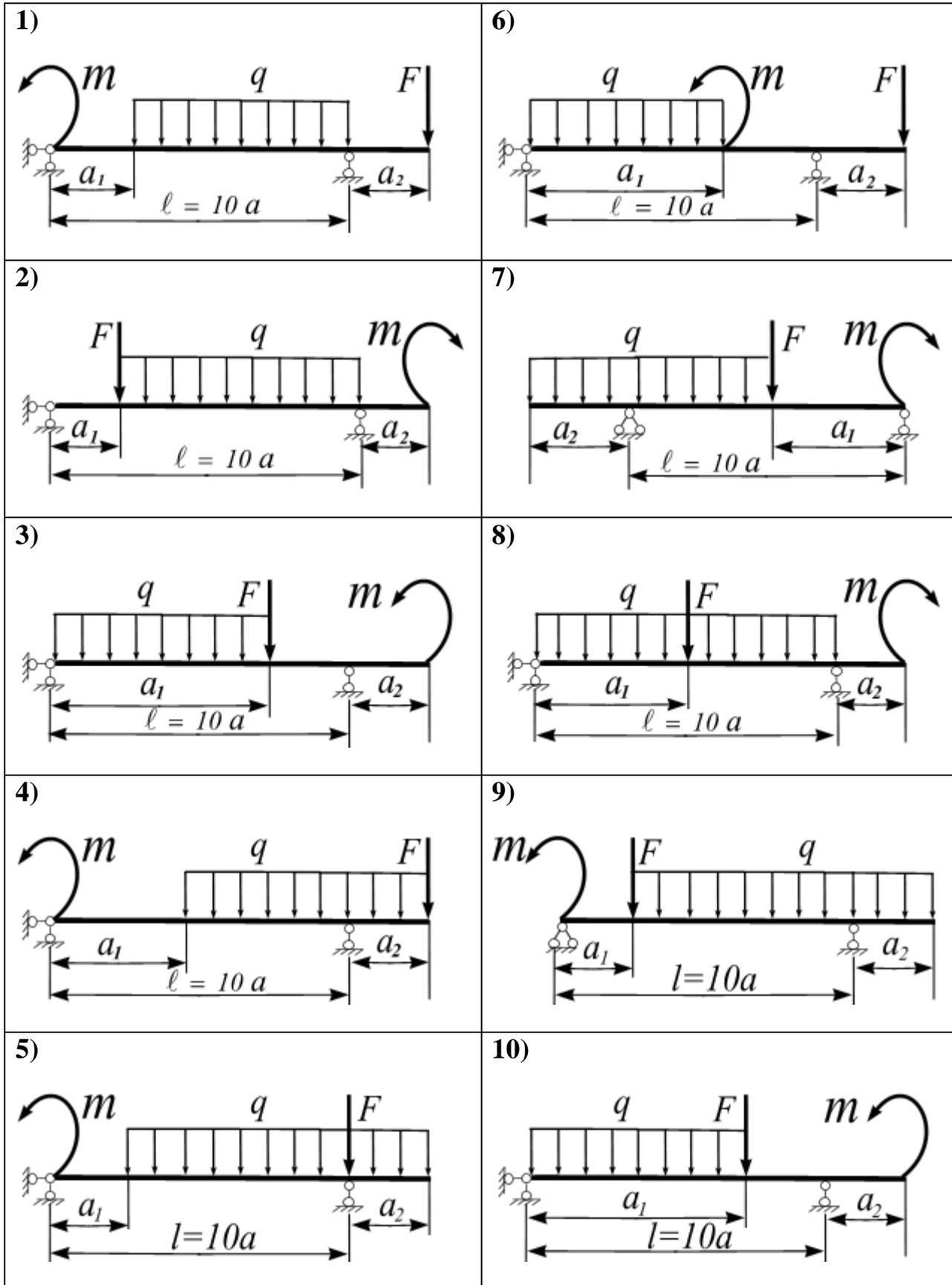


Рис.15

**Пример 6.** Шарнирно-опертая двутавровая балка (рис. 16) нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , нагружена силой  $F=1,2qa$  и нагружена моментом  $m = 2,4 qa^2$ .

*Требуется:*

1. Определить реакции опор в долях  $qa$  и проверить их.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  и найти их расчетные (наибольшие) значения.
3. Определить несущую способность балки  $q$ , исходя из условия прочности по нормальным напряжениям.
4. Проверить прочность балки по касательным напряжениям при найденной нагрузке  $q$ .

Дано: Длина пролета балки  $\ell = 6m$ ,  $\frac{a_1}{a} = 3$ ,  $\frac{a_2}{a} = 4$ . Расчетное сопротивление материала изгибу  $R=210 \text{ МПа}$ , срезу  $R_S=130 \text{ МПа}$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ . Сечение балки двутавр №30а.

Из табл.1 приложения для двутавра №30а находим:  $W_x=518 \text{ см}^3$ ,  $J_x=7780 \text{ см}^4$ , статический момент полусечения  $S_x=292 \text{ см}^3$ , толщина стенки  $s=6,5 \text{ мм}$ .

*Решение*

1. *Определение реакций опор.* Запишем уравнения равновесия для балки (рис. 16,а):

$$\sum m_A = 0, \quad V_B \cdot 10a - F \cdot 7a - q \cdot 7a \cdot 3,5a - m = 0,$$

$$V_B = \frac{1,2qa \cdot 7a + 24qa^2 + 2,4qa^2}{10a} = 3,5qa.$$

$$\sum m_B = 0, \quad -m - V_A \cdot 10a + q \cdot 7a \cdot 6,5a + F \cdot 3a = 0,$$

$$V_A = \frac{-2,4qa^2 + 45,5qa^2 + 3,6qa^2}{10a} = 4,67qa.$$

Проверка:  $\sum Y = 0, \quad V_A - 7qa - 1,2qa + V_B = 0,$

$$3,53qa - 7qa - 1,2qa + 4,67qa = 0,$$

$$8,2qa + 8,2qa = 0.$$

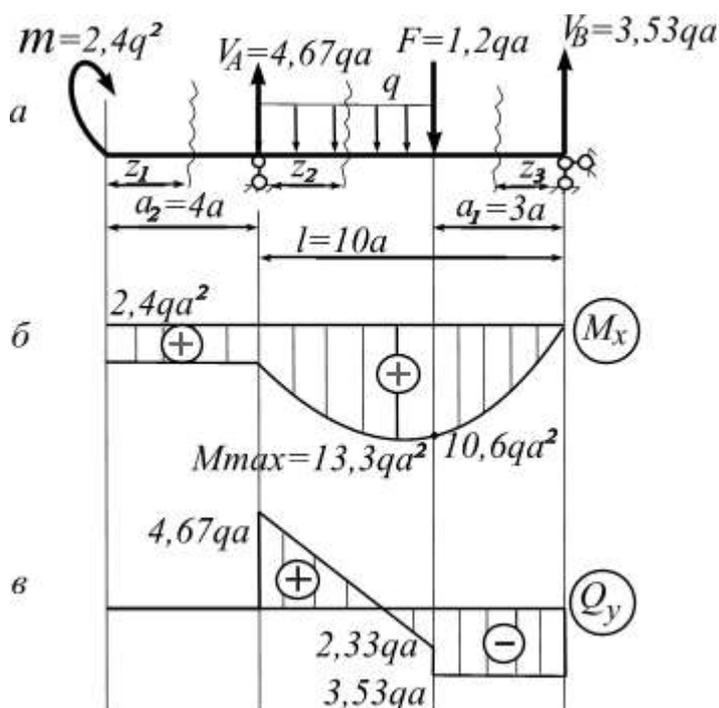


Рис. 16

2. Построение эпюр  $M_x$  и  $Q_y$ . Разобьем балку на три участка и составим аналитические выражения изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$ .

I участок,  $0 \leq z_1 \leq 4a$

$$M_1 = m = 2,4 qa^2 (\text{const}), \quad Q_1 = \frac{dM_1}{dz_1} = 0.$$

II участок,  $0 \leq z_2 \leq 7a$

$$M_2 = m + V_A \cdot z - \frac{qz^2}{2} \quad (\text{квадратичная парабола}),$$

$$\text{при } z_2 = 0, \quad M_2 = m = 2,4 qa^2,$$

$$\text{при } z_2 = 7a, \quad M_2 = 2,4 qa^2 + 4,67 qa \cdot 7a - \frac{q(7a)^2}{2} = 10,6 qa^2.$$

Исследуем изгибающий момент на экстремум:

$$Q_2 = \frac{dM_2}{dz_2} = V_A - qz_2 = 0, \quad z_2 = \frac{V_A}{q} = 4,67a.$$

При  $z_2 = 4,67a$  изгибающий момент имеет наибольшее значение:

$$M_{\max} = m + V_A \cdot z_2 - \frac{qz_2^2}{2} = -2,4qa^2 + 4,67qa \cdot 4,67a - \frac{q(4,67a)^2}{2} = 13,3qa^2.$$

$$Q_2 = \frac{dM}{dz_2} = V_A - qz_2 \quad (\text{линейный закон})$$

$$z_2 = 0, \quad Q_2 = V_A = 4,67qa,$$

$$z_2 = 7a, \quad Q_2 = 4,67qa - q \cdot 7a = -2,33qa.$$

III участок,  $0 \leq z_3 \leq 3a$

$$M_3 = V_B \cdot z_3 \quad (\text{линейный закон}), \quad z_3 = 0, \quad M_3 = 0,$$

$$z_3 = 3a, \quad M_3 = 3,53qa \cdot 3a = 10,6qa^2$$

$$Q_3 = -\frac{dM_3}{dz} = -V_B = -3,53qa \quad (\text{const}).$$

По найденным значениям  $M_x$  и  $Q_y$  строим эпюры (рис. 16 б, в). По ним находим:

$$M_{\text{расч.}} = 13,3qa^2, \quad Q_{\text{расч.}} = 4,67qa.$$

3. *Определение несущей способности балки.* Запишем условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч.}}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c, \quad \text{или} \quad \frac{13,3qa^2}{W_x} \leq R\gamma_c,$$

откуда

$$q \leq \frac{W_x \cdot R \cdot \gamma_c}{13,3a^2} = \frac{518 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 0,9}{13,3 \cdot 0,6^2} = 20447 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

4. *Проверка прочности балки по касательным напряжениям.* Условие прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\text{расч.}} \cdot S_{x\max}}{J_x \cdot b_y} \leq R_s \cdot \gamma_c,$$

где  $b_y$  - ширина сечения на уровне нейтральной оси, равная толщине стенки  $s=6,5$  мм.

$$\tau_{\max} = \frac{4,67 \cdot 20447 \cdot 0,6 \cdot 292 \cdot 10^{-6}}{7780 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = 33 \text{ МПа}.$$

Подставим  $\tau_{\max}$  в условие прочности

$$\tau_{\max} = 33 \text{ МПа} \leq R \cdot \gamma_c = 130 \cdot 0,9 = 117 \text{ МПа},$$

т.е. прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

*Ответ:* Несущая способность балки  $q = 20,45 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .

## КОСОЙ ИЗГИБ

## Задача 7

Стальная балка АВ (рис.17), загружена в главных плоскостях силами  $F_1$  и  $F_2$ .

*Требуется:*

1. Определить размеры поперечного сечения (табл. 9);
2. Найти значение полного прогиба и указать его направление:
  - для консольных балок – посередине их длины;
  - для балок на двух опорах – посередине пролета.

Исходные данные взять из таблицы 9.

*Порядок решения задачи 7*

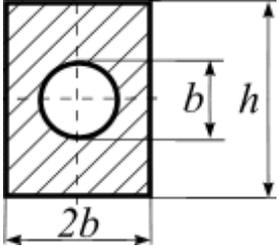
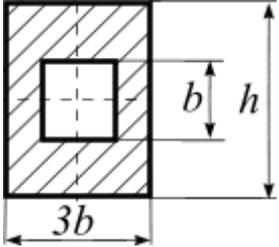
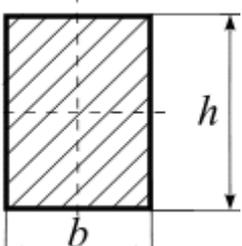
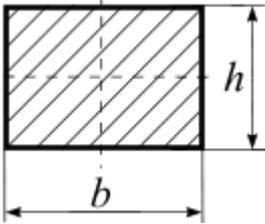
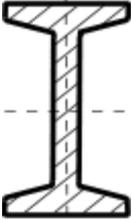
1. Вычертить в масштабе расчетную схему балки и ее поперечное сечение.
2. Построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  в главных плоскостях инерции.
3. Установить по эпюрам  $M_x$  и  $M_y$  опасное сечение балки.
4. Определить размеры поперечного сечения из условия прочности.

Принять расчетное сопротивление материала изгибу  $R$  равным 210 МПа; коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

5. Для указанного сечения вычислить прогибы  $f_y$  и  $f_x$  в главных плоскостях. Принять модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.
6. Найти величину полного прогиба  $f$  и указать его направление.



Рис. 17

Номер строки	Схема балки рис.17	$l$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	Форма сечения балки	
1	1	3,0	30	20	$h = 3b$	
2	2	3,2	40	30		
3	3	3,4	50	20	$h = 4b$	
4	4	3,6	60	40		
5	5	3,8	50	30	$h = 1,8b$	
6	6	4,0	70	40		
7	7	4,2	30	60	$h = 0,5b$	
8	8	4,2	40	50		
9	9	4,6	80	40		
0	0	4,8	90	60		
	$\delta$	$e$	$z$	$a$	$e$	

**Пример 7.** Балка АВ, заданного поперечного сечения (рис.18 а, б), нагружена силами  $F_1, F_2, F_3$ , направленными по главным центральным осям поперечного сечения.

*Требуется*

1. Построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  в главных плоскостях инерции.
2. Определить геометрические характеристики поперечного сечения балки.
3. По эпюрам  $M_x$  и  $M_y$  найти опасное сечение балки.
4. Определить размеры поперечного сечения из условия прочности.
5. Определить прогиб балки в середине ее пролета  $C$  и указать его направление.

Дано: Длина пролета балки  $\ell = 4,4 \text{ м}$ ;  $F_1 = 60 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 30 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 40 \text{ кН}$ . Расчетное сопротивление материала изгибу  $R = 210 \text{ МПа}$ ; модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

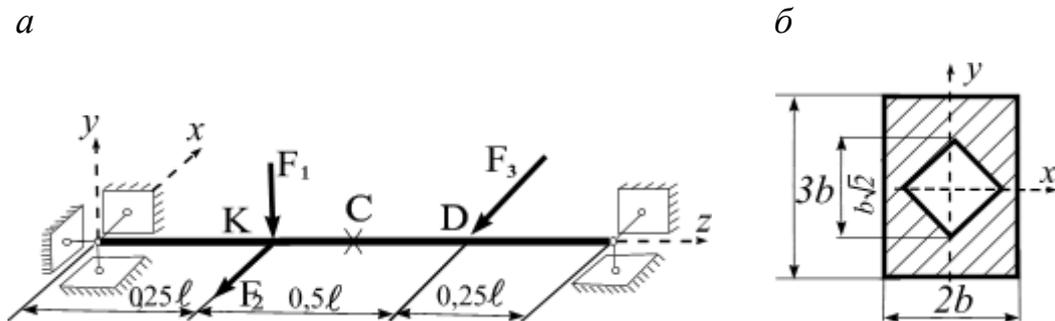


Рис.18

*Решение*

1. *Построение эпюр изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ .* Рассмотрим балку в вертикальной плоскости (рис.19а). Определим реакции опор:

$$\sum m_A = 0, \quad -F_1 \cdot 1,1 + B_y \cdot 4,4 = 0, \quad B_y = 15 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0, \quad A_y \cdot 4,4 + F_1 \cdot 3,3 = 0, \quad A_y = 45 \text{ кН.}$$

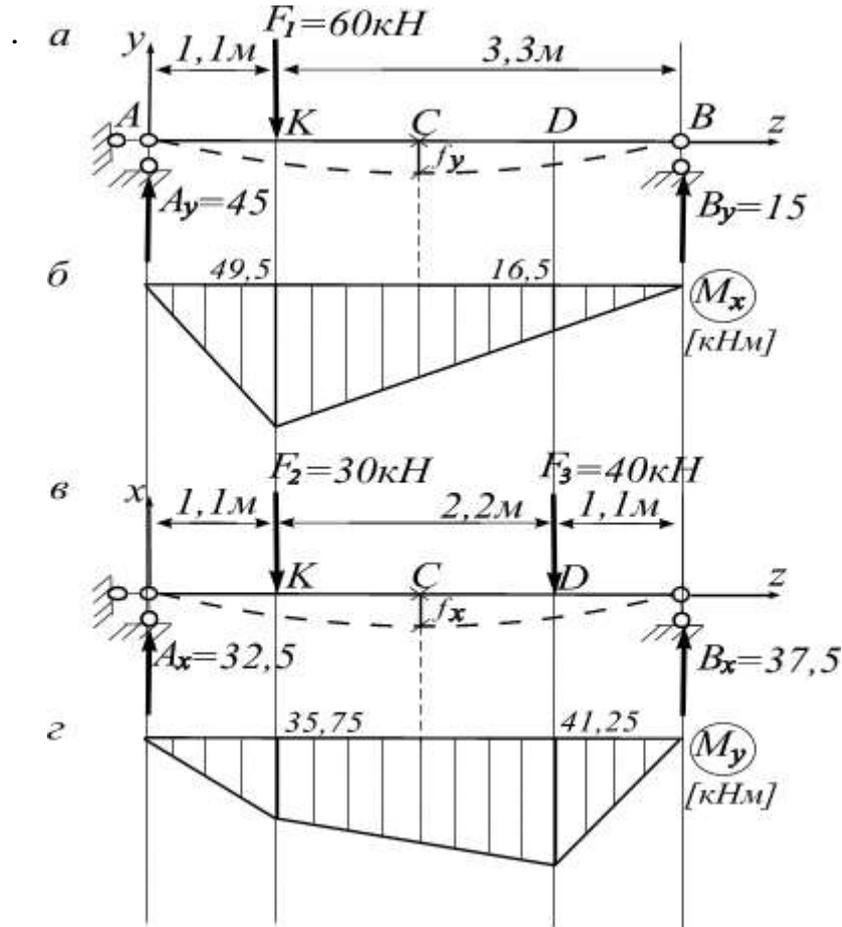


Рис. 19

Изгибающие моменты в сечениях К и Д:

$$M_x^K = A_y \cdot 1,1 = 45 \cdot 1,1 = 49,5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_x^D = B_y \cdot 1,1 = 15 \cdot 1,1 = 16,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру  $M_x$  (рис 19, б).

Рассмотрим балку в горизонтальной плоскости (рис. 19, в).

Определим реакции опор:

$$\sum m_A = 0, \quad -F_2 \cdot 1,1 - F_3 \cdot 3,3 + B_x \cdot 4,4 = 0, \quad B_x = 37,5 \text{ кН},$$

$$\sum m_B = 0, \quad -A_x \cdot 4,4 + F_2 \cdot 3,3 + F_3 \cdot 1,1 = 0, \quad A_x = 32,5 \text{ кН}.$$

Изгибающие моменты в сечениях К и Д:

$$M_y^K = A_x \cdot 1,1 = 32,5 \cdot 1,1 = 35,75 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_y^D = B_x \cdot 1,1 = 37,5 \cdot 1,1 = 41,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру  $M_y$  (рис.19, г).

2. *Определение геометрических характеристик поперечного сечения балки (рис.19,б) .* Осевые моменты инерции сечения:

$$J_x = \frac{(2b) \cdot (3b)^3}{12} - \frac{b^4}{12} = 4,4b^4; \quad J_y = \frac{(3b) \cdot (2b)^3}{12} - \frac{b^4}{12} = 1,9b^4.$$

Осевые моменты сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{4,4b^4}{1,5b} = 2,9b^3, \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{1,9b^4}{b} = 1,9b^3.$$

Отношение моментов сопротивления:

$$n = \frac{W_x}{W_y} = \frac{2,9b^3}{1,9b^3} = 1,5.$$

3. *Поиск опасного сечения балки.*

Для этого в сечениях  $K$  и  $D$  определим приведенные моменты:

$$M_{\text{прив}}^K = M_x^K + M_y^K \cdot n = 49,5 + 35,75 \cdot 1,5 = 103 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{\text{прив}}^D = M_x^D + M_y^D \cdot n = 16,5 + 41,25 \cdot 1,5 = 78,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сопоставив моменты в точках  $K$  и  $D$ , находим, что опасным является сечение  $K$ .

4. *Определение размеров сечения балки .* Условие прочности при косом изгибе для опасного сечения балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{прив}}^K}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c,$$

откуда расчетный (требуемый) момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\text{прив}}^K}{R \gamma_c} \quad \text{или} \quad 2,9b^3 \geq \frac{M_{\text{прив}}^K}{R \gamma_c}.$$

Тогда размер сечения  $b$  будет равен:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{прив}}^K}{2,9 \cdot R \cdot \gamma_c}} = \sqrt[3]{\frac{103 \cdot 10^3}{2,9 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 0,9}} = 0,573 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 5,73 \text{ см}.$$

Осевые моменты инерции сечения соответственно равны:

$$J_x = 4,4b^4 = 4,4 \cdot 5,73^4 = 4743 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 1,9b^4 = 1,9 \cdot 5,73^4 = 2048 \text{ см}^4.$$

1. *Определение прогиба сечения C.* Рассмотрим балку в вертикальной плоскости (рис.19, а). Универсальное уравнение прогиба:

$$EJ_x \cdot f_y^z = EJ_x \theta_0 \cdot z + \frac{A_y (z-0)^3}{3!} - \frac{F_1 (z-1,1)^3}{3!}.$$

Для определения начального параметра  $\theta_0$  используем условие  $f_y^B = 0$ .

$$EJ f_y^B = EJ_x \theta_0 \cdot 4,4 + \frac{A_y \cdot 4,4^3}{3!} - \frac{F_1 3,3^3}{3!} = 0,$$

$$EJ \theta_0 \cdot 4,4 = -\frac{45 \cdot 4,4^3}{6} + \frac{60 \cdot 3,3^3}{6},$$

$$\text{откуда } EJ \theta_0 = -63,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Уравнение прогиба для сечения C при  $z = 2,2 \text{ м}$  имеет вид:

$$EJ_x f_y^c = EJ_x \theta_0 2,2 + \frac{A_y 2,2^3}{3!} - \frac{F_1 1,1^3}{3!} = -63,5 \cdot 2,2 + \frac{45 \cdot 2,2^2}{6} - \frac{60 \cdot 1,1^3}{6} = -73,15.$$

$$f_y^c = -\frac{73,15 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EJ_x} = -\frac{73,15 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4743 \cdot 10^{-8}} = -7,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,77 \text{ см}.$$

Прогиб  $f_y^c$  произошел в отрицательном направлении оси  $y$  (рис.19, а).

Рассмотрим балку в горизонтальной плоскости (рис.19, в).

Универсальное уравнение прогиба:

$$EJ_y f_x^z = EJ_y \theta_0 \cdot z + \frac{A_x (z-0)^3}{3!} - \frac{F_2 (z-1,1)^3}{3!} - \frac{F_3 (z-3,3)^3}{3!}.$$

Для определения начального параметра  $\theta_0$  используем условие  $f_x^B = 0$ .

$$EJ_y f_x^B = EJ_y \theta_0 \cdot 4,4 + \frac{A_x \cdot 4,4^3}{3!} - \frac{F_2 \cdot 3,3^3}{3!} - \frac{F_3 \cdot 1,1^3}{3!} = 0,$$

$$EJ_y \cdot \theta_0 \cdot 4,4 = -\frac{32,5 \cdot 4,4^3}{6} + \frac{30 \cdot 3,3^3}{6} + \frac{40 \cdot 1,1^3}{6},$$

$$\text{откуда } EJ_y \theta_0 = -62 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Уравнение прогиба для сечения  $C$  при  $z = 2,2$  м имеет вид

$$\begin{aligned} EJ_y f_x^c &= EJ_y \theta_0 \cdot 2,2 + \frac{A_x \cdot 2,2^3}{3!} - \frac{F_2 \cdot 1,1^3}{3!} = \\ &= -62 \cdot 2,2 + \frac{32,5 \cdot 2,2^3}{6} - \frac{30 \cdot 1,1^3}{6} = -92 \text{ кНм}^3. \end{aligned}$$

$$f_x^c = -\frac{92}{EJ_y} = -\frac{92 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2048 \cdot 10^{-8}} = -0,022 \text{ м} = -2,2 \text{ см}.$$

Прогиб  $f_x^c$  произошел в отрицательном направлении оси  $x$  (рис.19,в).

Полный прогиб в заданном сечении вычислим по формуле

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

$$f = \sqrt{2,2^2 + 0,77^2} = 2,33 \text{ см}.$$

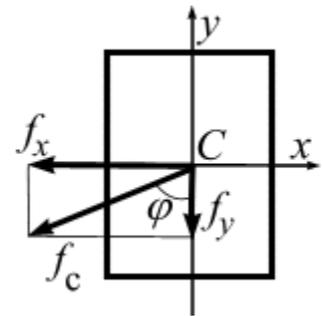


Рис. 20

Линия полного прогиба отклонена от главной оси  $y$  на угол:

$$\text{tg } \varphi = \frac{f_x}{f_y} = \frac{2,2}{0,77} = 2,85; \quad \varphi = 71^\circ.$$

*Ответ:* Размер поперечного сечения балки  $b=5,74$  см; полный прогиб балки  $f=2,33$  см.

## ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

## Задача 8

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 21, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $D$ . Требуется определить несущую способность стержня (силу  $F$ ) и построить ядро сечения.

Исходные данные взять из табл. 10.

## Порядок решения задачи 8

1. Вычертить заданное поперечное сечение с соблюдением масштаба. Определить положение центра тяжести и провести главные оси. Вычислить осевые моменты и радиусы инерции заданного сечения.
2. Найти положение нейтральной линии и показать ее на чертеже. Выявить опасные точки сечения и выразить напряжения в них через силу  $F$ .
3. Исходя из условий прочности на сжатие и растяжение, при заданных значениях расчетного сопротивления материала сжатию  $R_c$  и растяжению  $R_t$  (табл. 10), определить несущую способность стержня. Принять коэффициент условий работы  $\gamma_c$  равным 0,9.
4. Построить ядро сечения.

Таблица 10

Номер строки	Тип сечения, рис.21	$a$ , см	$b$ , см	$R_c$ МПа	$R_t$ МПа
1	1	6	6	110	21
2	2	2	2	120	22
3	3	3	3	130	23
4	4	4	4	140	24
5	5	5	5	150	25
6	6	6	6	60	26
7	7	2	2	70	27
8	8	3	3	80	28
9	9	4	4	90	29
0	0	5	5	100	30
	$e$	$\delta$	$z$	$\delta$	$z$

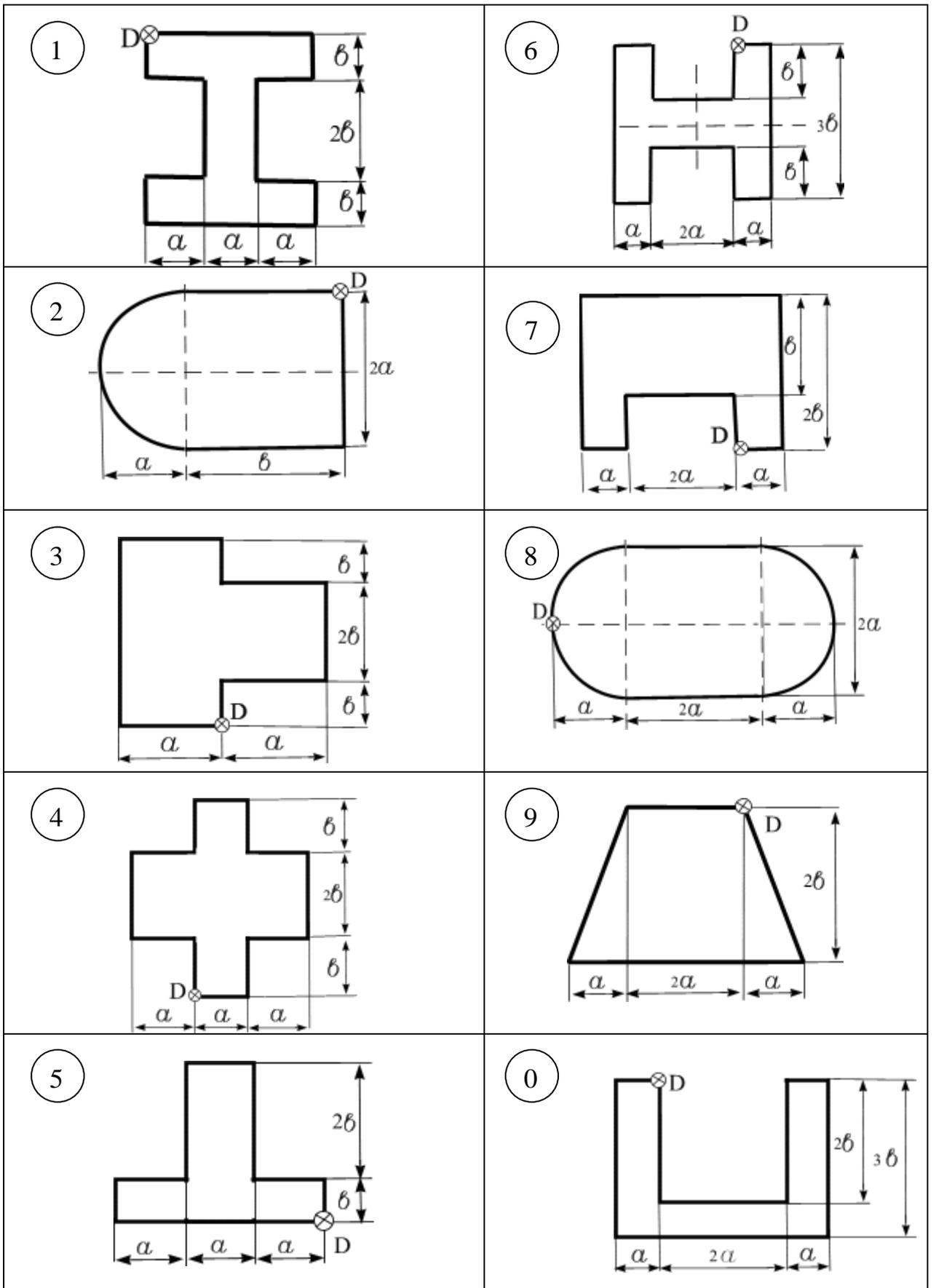
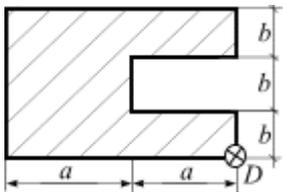


Рис.21

**Пример 8.** Короткий чугунный стержень, заданного поперечного сечения (рис. 22), сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $D$ .

*Требуется:*

1. Определить геометрические характеристики поперечного сечения (положение центра тяжести, осевые моменты инерции и радиусы инерции).
2. Найти положение нейтральной линии и опасных точек сечения.
3. Вычислить напряжения в опасных точках, выразив их через силу  $F$ .
4. Исходя из условий прочности на сжатие и растяжение, найти значения сил  $F_c$  и  $F_t$ . Определить несущую способность стержня.
5. Построить ядро сечения.



Дано:  $a=6$  см,  $b=3$  см; расчетное сопротивление материала сжатию  $R_c=120$  МПа, растяжению -  $R_t=18$  МПа. Коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .

Рис.22

*Решение*

1. *Определение геометрических характеристик поперечного сечения.*

Найдем положение центра тяжести сечения (рис. 23). Данное сечение имеет ось симметрии (ось  $x$ ), поэтому центр тяжести находится на ней. Положение второй оси  $y$  найдем, вычислив координату  $x_c$  центра тяжести  $S$ .

Для этого дополним площадь сечения до полного прямоугольника  $A_1$ , а затем вычтем из нее площадь вырезанного прямоугольника  $A_2$ . Тогда площадь сечения будет равна:

$$A = A_1 - A_2 = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 108 - 18 = 90 \text{ см}^2.$$

В качестве вспомогательной оси возьмем ось  $y'$ , тогда координата центра тяжести  $S$  будет равна:

$$x_c = \frac{\sum S_{y'}}{\sum A_i} = \frac{x_{c_1} A_1 - x_{c_2} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 9 - 9 \cdot 6 \cdot 3}{90} = 5,4 \text{ см.}$$

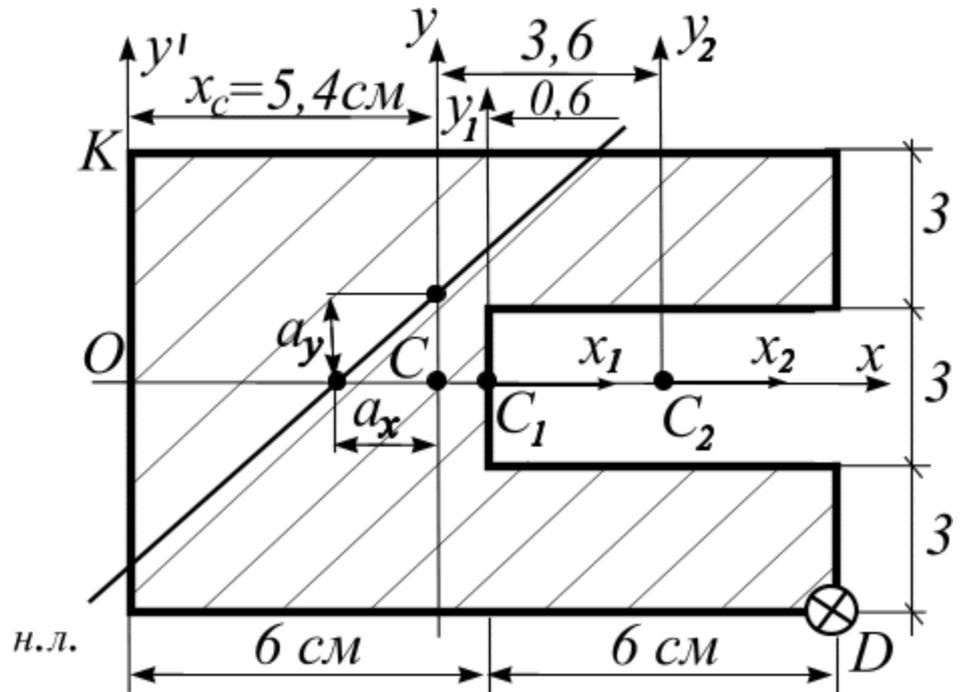


Рис. 23

Вычислим моменты инерции относительно главных центральных осей  $x$  и  $y$ . Через точки  $C_1$  и  $C_2$  проведем собственные центральные оси каждой фигуры и воспользуемся формулами параллельного переноса.

$$J_x = J_x^1 - J_x^2 = (J_{x_1} + a_1^2 A_1) - (J_{x_2} + a_2^2 A_2) = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{6 \cdot 3^3}{12} = 715,5 \text{ см}^4,$$

$$J_y = J_y^1 - J_y^2 = (J_{y_1} + b_1^2 A_1) - (J_{y_2} + b_2^2 A_2) =$$

$$= \left( \frac{9 \cdot 12^3}{12} + 0,6^2 \cdot 108 \right) - \left( \frac{3 \cdot 6^3}{12} + 3,6^2 \cdot 18 \right) = 1048 \text{ см}^4,$$

где  $a_1 = a_2 = 0$ , т. к. оси  $x_1$  и  $x_2$  совпадают с осью  $x$ ;  $b_1 = 0,6$  см и  $b_2 = 3,6$  см - расстояния между осями  $y_1$  и  $y_2$  и главной центральной осью  $y$ .

Вычислим радиусы инерции относительно главных центральных осей:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{715,5}{90} = 7,95 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{1048}{90} = 11,64 \text{ см}^2.$$

2. *Определение положения нейтральной линии данного сечения.* По рис. 23 определяем координаты силовой точки  $D$ :

$$x_F = 6,6 \text{ см}; \quad y_F = -4,5 \text{ см}.$$

Тогда длина отрезков  $a_x$  и  $a_y$ , отсекаемых нейтральной линией от осей  $x$  и  $y$ , будет равна соответственно

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{11,64}{6,6} = -1,76 \text{ см}, \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{7,95}{-4,5} = 1,77 \text{ см}.$$

Затем строим нейтральную линию (н.л.). Точки сечения  $K$  и  $D$ , наиболее удаленные от нее, являются *опасными* и имеют следующие координаты (рис.23):

$$\begin{aligned} x_K &= -5,4 \text{ см}; & y_K &= 4,5 \text{ см}; \\ x_D &= 6,6 \text{ см}; & y_D &= -4,5 \text{ см}. \end{aligned}$$

3. *Вычисление напряжений в опасных точках K и D.* Выразим напряжения через силу  $F$  и площадь сечения  $A$ :

$$\begin{aligned} \sigma_K &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_K}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_K}{i_x^2} \right) = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{6,6(-5,4)}{11,64} + \frac{(-4,5) \cdot 4,5}{7,95} \right) = \\ &= -\frac{F}{A} (1 - 3,06 - 2,547) = -\frac{F}{A} (-4,607) = 4,607 \frac{F}{A}; \\ \sigma_D &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_D}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_D}{i_x^2} \right) = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{6,6 \cdot 6,6}{11,64} + \frac{(-4,5)(-4,5)}{7,95} \right) = \\ &= -\frac{F}{A} (1 + 3,74 + 2,55) = -7,29 \frac{F}{A}. \end{aligned}$$

Перед формулами напряжений поставлен знак «минус», так как сила  $F$  является сжимающей.

4. *Определение несущей способности стержня.* Запишем условия прочности для опасных точек, при этом будем иметь в виду, что точка  $K$  работает на растяжение, а точка  $D$  - на сжатие. Исходя из условия прочности на растяжение и сжатие, найдем значения сил  $F_t$  и  $F_c$ :

$$\sigma_K = 4,607 \frac{F}{A} \leq R_t \cdot \gamma_c,$$

$$\text{откуда } F_t \leq \frac{A \cdot R_t \cdot \gamma_c}{4,607} = \frac{90 \cdot 10^{-4} \cdot 18 \cdot 10^6 \cdot 0,9}{4,607} = 31,6 \text{ кН}.$$

$$\sigma_D = \left| 7,29 \frac{F}{A} \right| \leq R_c \cdot \gamma_c,$$

$$\text{откуда } F_c \leq \frac{A \cdot R_c \cdot \gamma_c}{7,29} = \frac{90 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 \cdot 0,9}{7,29} = 133,3 \text{ кН}.$$

Из двух найденных значений силы  $F_t$  и  $F_c$  в качестве значения несущей способности выбираем меньшую, т. е.  $F \leq 31,6 \text{ кН}$ .

5. *Построение ядра сечения.* Проведем четыре нейтральные линии, касательные к контуру сечения: I-I, II-II, III-III, IV-IV (рис. 24).

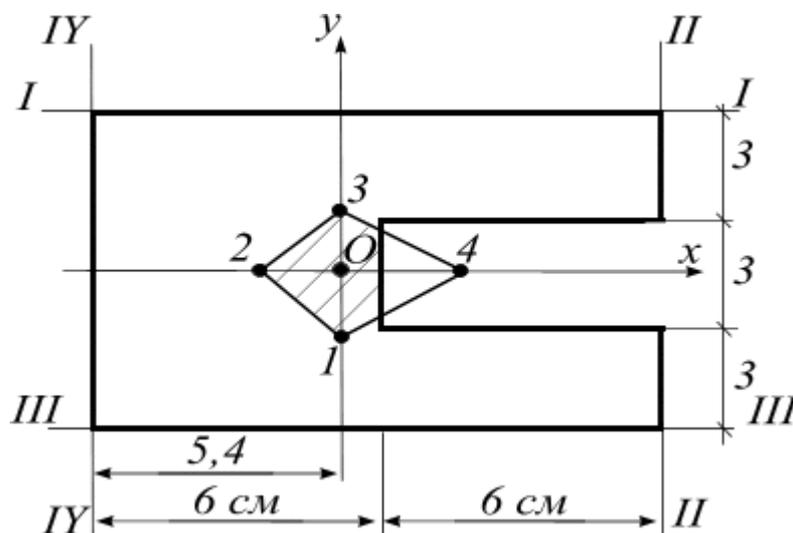


Рис. 24

Для касательной I-I длины отрезков, отсекаемых от осей координат, равны  $a_x = \infty$ ,  $a_y = 4,5 \text{ см}$ . Тогда координаты точки 1 ядра сечения таковы:

$$x_F = -\frac{i_y^2}{a_x} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{a_y} = -\frac{7,95}{4,5} = -1,77 \text{ см}.$$

Для касательной III-III:  $a_x = \infty$ ,  $a_y = -4,5 \text{ см}$ . Координаты точки 3:

$$x_F = 0, \quad y_F = 1,77 \text{ см}.$$

Для касательной II-II:  $a_x = 6,6 \text{ см}$ ,  $a_y = \infty$ . Координаты точки 2:

$$x_F = \frac{i_y^2}{a_x} - \frac{11,64}{6,6} = -1,76 \text{ см}, \quad y_F = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0.$$

Для касательной IV-IV:  $a_x = -5,4 \text{ см}$ ,  $a_y = \infty$ . Координаты точки 4:

$$x_F = \frac{i_y^2}{a_x} = -\frac{11,64}{-5,4} = 2,15 \text{ см}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0.$$

Построим точки 1-4, и соединив их прямыми линиями, получим ядро сечения (рис. 24).

*Ответ:* Несущая способность стержня  $F \leq 31,6 \text{ кН}$ .

## ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

## Задача 9

Пространственный ломаный стержень круглого поперечного сечения (рис.25), имеющий прямые углы в точках  $A$  и  $B$  и участки длиной  $a$  для всех вариантов (см. рис. 25, вариант 0), нагружен силой  $F$  или равномерно распределенной нагрузкой  $q$ .

*Требуется:* подобрать диаметр стержня, используя четвертую теорию прочности. Исходные данные взять из таблицы 11.

## Порядок решения задачи 9

1. Вычертить расчетную схему ломаного стержня и его поперечное сечение.

2. Построить в аксонометрии эпюры внутренних усилий:

$N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ . Указать вид сопротивления для каждого участка стержня.

3. Установить опасное сечение и записать для него приведенный момент по четвертой теории прочности.

4. Определить диаметр стержня из условия прочности, приняв допустимое напряжение для материала стержня  $\sigma_{\text{доп}} = 160 \text{ МПа}$ .

Таблица 11

Номер строки	Схема стержня, рис.25	$a$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	Номер строки	Схема стержня, рис.25	$a$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м
1	1	1,0	1	1	6	6	1,5	6	3
2	2	1,1	2	2	7	7	1,6	7	1
3	3	1,2	3	3	8	8	1,7	8	2
4	4	1,3	4	4	9	9	1,8	4	4
5	5	1,4	5	5	0	0	1,9	9	6
	$e$	$z$	$\delta$	$e$		$e$	$z$	$\delta$	$e$

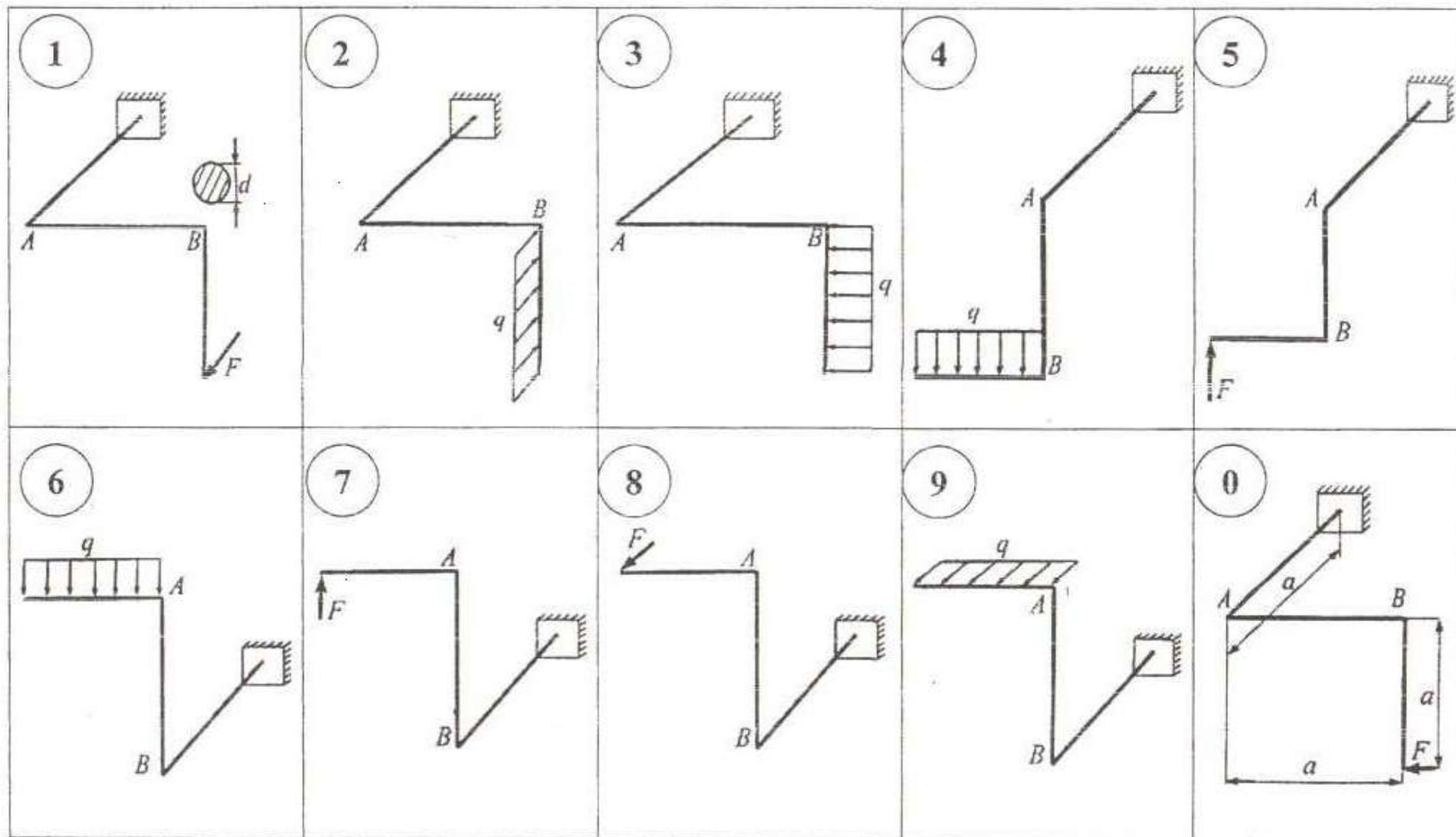


Рис. 25

**Пример 9.** На пространственный ломаный стержень круглого поперечного сечения, имеющий прямые углы в точках  $A$  и  $B$ , действует равномерно распределенная нагрузка  $q$  (рис.26).

Требуется:

1. Построить в аксонометрии шесть эпюр внутренних усилий:  $N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ .

2. Указать вид сопротивления для каждого участка стержня.

3. По эпюрам установить опасное сечение и записать для него приведенный момент по четвертой теории прочности.

4. Определить диаметр стержня из условия прочности.

Дано:  $a = 2 \text{ м}$ ;  $q = 5 \text{ кН/м}$ ; допускаемое напряжение для материала  $\bar{\sigma} = 160 \text{ МПа}$ .

*Решение*

1. *Построение эпюр.* Разобьем стержень на три участка и на каждом покажем систему координат  $Oxyz$ . Ось  $z$  совмещаем с продольной осью каждого участка, а оси  $x$  и  $y$  - с плоскостью поперечного сечения. Эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  изображаем со стороны растянутых волокон в плоскости действия момента ( $M_x$  - в плоскости  $yOz$ ,  $M_y$  - в плоскости  $xOz$ ).

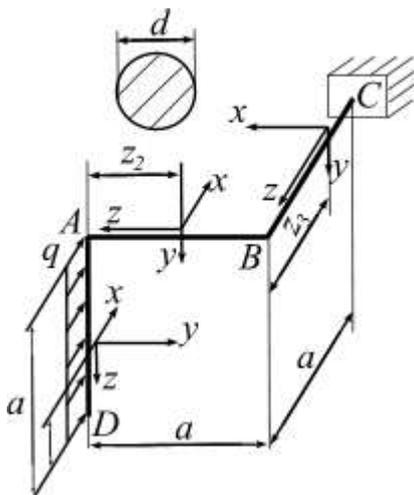


Рис. 26

Построение эпюр начинаем с участка  $DA$ .

Проводя мысленно сечение, каждый раз будем «отбрасывать» защемленную часть ломаного стержня.

Участок  $DA$ ,  $0 \leq z_1 \leq a$

$$\begin{aligned} N_z &= 0, & M_x &= 0, \\ Q_x &= qz_1 \quad (0; qa), & M_y &= \frac{qz_1^2}{2} \quad (0; \frac{qa^2}{2}), \\ Q_y &= 0, & M_z &= 0. \end{aligned}$$

Участок  $AB$ ,  $0 \leq z_2 \leq a$

$$N_z = 0,$$

$$Q_x = qa,$$

$$Q_y = 0,$$

$$M_x = 0,$$

$$M_y = qa \cdot z_2 (0; qa^2),$$

$$M_z = \frac{qa^2}{2}.$$

Участок  $BC$ ,  $0 \leq z_3 \leq a$

$$N_z = -qa,$$

$$Q_x = 0,$$

$$Q_y = 0,$$

$$M_x = \frac{qa^2}{2},$$

$$M_y = qa^2,$$

$$M_z = 0.$$

По найденным значениям строим следующие эпюры: продольной силы  $N_z$ ; поперечной силы  $Q_x$ ; изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ , совмещенных на одном чертеже; крутящего момента  $M_z$  (рис.27).

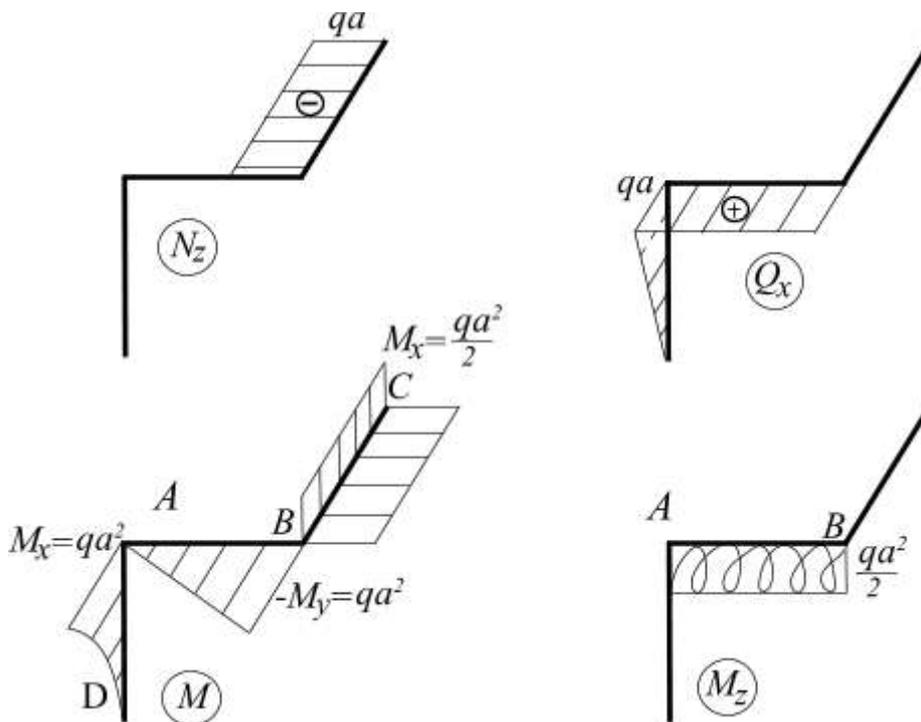


Рис. 27

3. Устанавливаем вид сопротивления бруса по эпюрам, изображенным на рис. 27: участок  $DA$  – чистый изгиб в одной плоскости и сдвиг;

участок  $AB$  – чистый изгиб в одной плоскости, кручение и сдвиг;

участок  $BC$  – чистый изгиб в двух плоскостях и сжатие.

4. *Определение опасного сечения.* Проанализировав эпюры (рис.27), выявляем два вероятно опасных сечения:

- в конце участка  $AB$  - точка  $B$ , где моменты

$$M_y = qa^2 = 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_z = \frac{qa^2}{2} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

- на участке  $BC$  – все сечения равноопасны, для точки  $C$  имеем

$$M_x = \frac{qa^2}{2} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_y = qa^2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad N_z = -qa = -10 \text{ кН}.$$

В сечениях  $B$  и  $C$  по IY теории прочности вычислим приведенные моменты:

$$M_{np}^{IY} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}.$$

$$M_{np}^B = \sqrt{M_y^2 + 0,75M_z^2} = \sqrt{20^2 + 0,75 \cdot 10^2} = 21,79 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{np}^C = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Опасным является сечение  $C$ , где  $M_{np} = 22,36 \text{ кНм}$ .

5. *Расчет диаметра стержня исходя из условия прочности:*

$$\sigma_{\text{экв}}^{IY} = \frac{M_{np.}}{W_x} \leq \sigma_{\text{п}}.$$

где  $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3$  - осевой момент сопротивления поперечного сечения.

$$\text{Тогда} \quad \sigma_{\text{экв}}^{IY} = \frac{M_{np.}}{0,1d^3} \leq \sigma_{\text{п}},$$

откуда необходимый диаметр  $d$  стержня равен

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{np.}}{0,1 \cdot \sigma_{\text{п}}}} = \sqrt[3]{\frac{22,36 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 1,118 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 11,18 \text{ см}.$$

*Ответ:* диаметр ломаного стержня  $d \geq 11,2 \text{ см}$ .

## УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

### Задача 10

Стальной стержень (табл. 12) сжимается нормативной силой  $F_n$ .

*Требуется:*

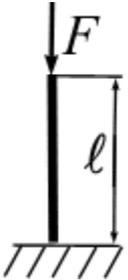
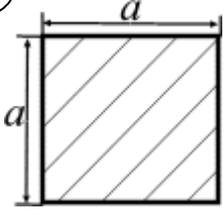
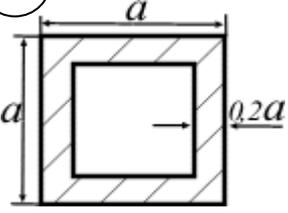
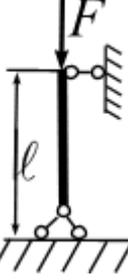
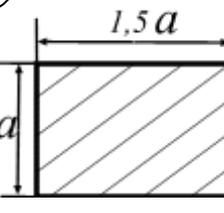
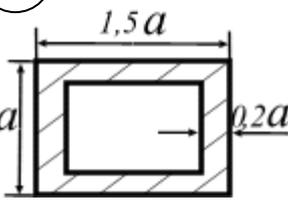
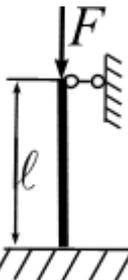
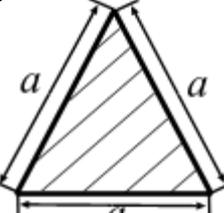
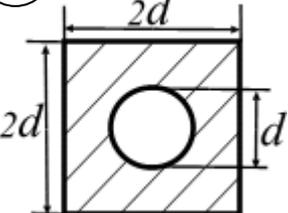
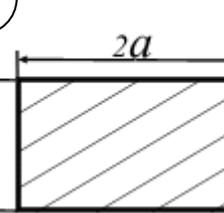
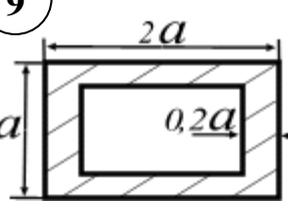
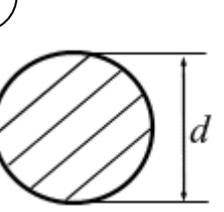
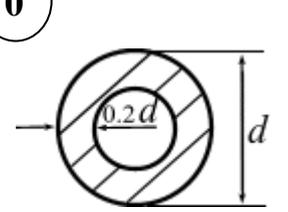
- найти размер поперечного сечения стержня из расчета на устойчивость;
- определить величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Исходные данные, схему закрепления стержня и форму поперечного сечения взять из табл. 12.

#### *Порядок решения задачи 10*

1. Вычертить схему стержня и его поперечное сечение.
2. Вычислить расчетное значение силы, приняв коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f$  равным 1,2.
3. Найти геометрические характеристики сечения и гибкость стержня, выразив их через размер сечения ( $a$  или  $d$ ).
4. Задаваясь величиной коэффициента  $\varphi_1 = 0,5$ , определить размер сечения исходя из условия устойчивости стержня. Использовать метод последовательных приближений. Принять расчетное сопротивление материала сжатию  $R = 200 \text{ МПа}$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c = 0,9$ .
5. Для полученного сечения стержня определить критическую силу. В зависимости от гибкости стержня расчет вести либо по формуле Эйлера, либо по формуле Ясинского.  
Принять предельную гибкость для данного материала  $\lambda_{пред}$  равной 100; модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; коэффициенты  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$  (для формулы Ясинского).
6. Найти величину коэффициента запаса устойчивости по отношению к нормативной нагрузке.

Таблица 12

Номер строки	$F_n$ , кН	$l$ , м	Схема закрепления стержня	Форма сечения стержня	
1 2	100 200	2,1 2,2		1 	6 
3 4	300 400	2,3 2,4		2 	7 
5 6	500 600	2,5 2,6		3 	8 
7 8	700 800	2,7 2,8		4 	9 
9 0	900 1000	2,9 3,0		5 	0 
	$z$	$\partial$	$\partial$	$e$	

**Пример 10.** Стальная стойка заданного поперечного сечения (рис. 28 а, б), одинаково закрепленная в обеих главных плоскостях, центрально сжата силой  $F$ .

*Требуется:*

1. Вычислить расчетное значение силы.
2. Определить геометрические характеристики сечения и гибкость стержня, выразив их через размер сечения  $a$ .
3. Найти размер  $a$  поперечного сечения из условия устойчивости (путем последовательных приближений).
4. Определить значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Дано:  $\ell = 2,8$  м; коэффициент приведения длины стержня  $\mu = 1$ ; нормативное значение силы  $F_n = 650$  кН; коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f = 1,2$ ; расчетное сопротивление материала сжатию  $R = 200$  МПа; предельная гибкость  $\lambda_{пред} = 100$ ; модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

*Решение*

1. *Вычисление расчетного значения силы:*

$$F = F_n \cdot \gamma_f = 650 \cdot 1,2 = 780 \text{ кН.}$$

2. *Определение геометрических характеристик сечения и гибкости стержня.* Площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{\pi a^2}{4} - 0,5a \cdot 0,25a = 0,66a^2,$$

откуда размер сечения  $a = \sqrt{\frac{A}{0,66}}$ .

Осевые моменты инерции относительно главных осей:

$$J_x = \frac{\pi a^4}{64} - \frac{0,5a \cdot (0,25a)^3}{12} = 0,0483a^4,$$
$$J_y = \frac{\pi a^4}{64} - \frac{0,25a \cdot (0,5a)^3}{12} = 0,0464a^4.$$

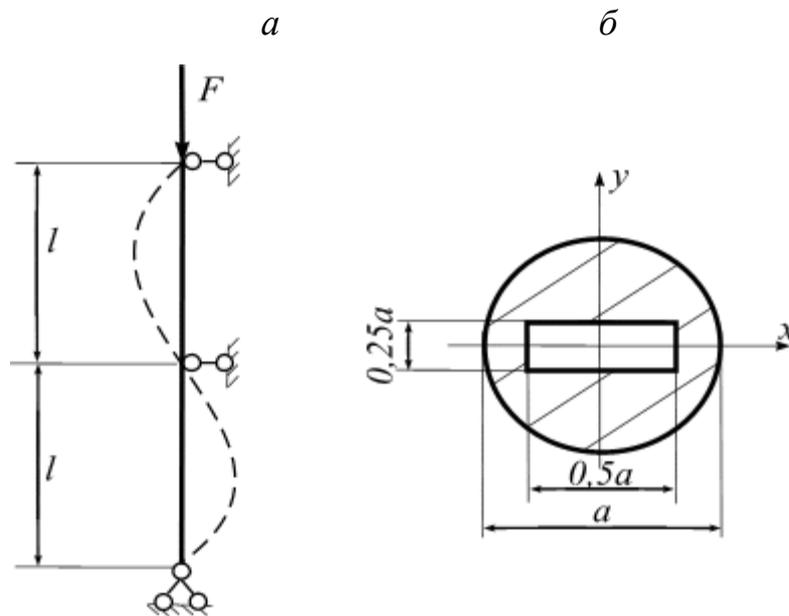


Рис. 28

Сопоставляя моменты инерции, находим, что  $J_{min}=J_y$ , т.е. потеря устойчивости произойдет в плоскости, совпадающей с осью  $y$ . Минимальный радиус инерции -

$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{0,0464a^4}{0,66a^2}} = 0,264a,$$

а наибольшая гибкость стойки -

$$\lambda_{max} = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 2,8}{0,264a} = \frac{10,6}{a}.$$

Данная стойка может потерять устойчивость (изогнуться) на участке длиной  $\ell$ , как шарнирно-опертый стержень, см. рис. 28,а.

3. *Определение размера поперечного сечения исходя из условия устойчивости стойки:*

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c.$$

Необходимая площадь поперечного сечения стержня:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{780 \cdot 10^3}{\varphi \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = \frac{4,33 \cdot 10^{-3}}{\varphi} \text{ м}^2,$$

где  $\varphi$  - коэффициент продольного изгиба.

Первое приближение. Задаемся  $\varphi_1 = 0,5$ . Тогда

$$A_1 \geq \frac{4,33 \cdot 10^{-3}}{\varphi_1} = \frac{4,33 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 8,66 \cdot 10^{-3} = 0,00866 \text{ м}^2,$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{A_1}{0,66}} = \sqrt{\frac{0,00866}{0,66}} = 0,1145 \text{ м},$$

$$\lambda_1 = \frac{10,6}{a_1} = \frac{10,6}{0,1145} = 92,57.$$

По табл. 13 для стали имеем:

$$\lambda = 90 \quad \varphi = 0,665$$

$$\lambda = 100 \quad \varphi = 0,599.$$

Таблица 13

Коэффициенты $\varphi$ продольного изгиба центрально сжатых стержней по СНиП 11-23-81			
Гибкость $\lambda$	Сталь с расчетным сопротивлением $R=200$ МПа	Гибкость $\lambda$	Сталь с расчетным сопротивлением $R=200$ МПа
10	0,988	120	0,479
20	0,967	130	0,425
30	0,939	140	0,376
40	0,906	150	0,328
50	0,869	160	0,290
60	0,827	170	0,259
70	0,782	180	0,233
80	0,734	190	0,210
90	0,665	200	0,191
100	0,599	210	0,174
110	0,537	220	0,160

Применив линейную интерполяцию, найдем значение коэффициента  $\varphi_1^i$ ,

соответствующее гибкости  $\lambda_1 = 92,57$ :

$$\varphi_1^i = 0,665 - \frac{(0,665 - 0,599) \cdot 2,57}{10} = 0,648.$$

Коэффициенты  $\varphi_1$  и  $\varphi_1^l$  существенно отличаются друг от друга, следовательно, выбор неудачен, так как:

действительное напряжение в стойке равно

$$\sigma = \frac{F}{A_1} = \frac{780 \cdot 10^3}{8,66 \cdot 10^{-3}} = 90 \text{ МПа},$$

а допускаемое напряжение на устойчивость

$$\varphi_1^l \cdot R \cdot \gamma_c = 0,648 \cdot 200 \cdot 0,9 = 116,6 \text{ МПа}.$$

Следовательно, недогрузка составляет  $\frac{116,6 - 90}{116,6} \cdot 100\% = 22,8\% \triangleright 5\%$ ,

что больше 5%, поэтому площадь нужно уменьшить.

*Второе приближение.* Принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^l}{2} = \frac{0,5 + 0,648}{2} = 0,574.$$

Тогда

$$A_2 = \frac{4,33 \cdot 10^{-3}}{0,574} = 7,54 \cdot 10^{-3} = 0,00754 \text{ м}^2,$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{A_2}{0,66}} = \sqrt{\frac{0,00754}{0,66}} = 0,107 \text{ м}, \quad \lambda_2 = \frac{10,6}{0,107} = 99.$$

Используя линейную интерполяцию, по табл. 13 найдем, что

$$\varphi_2^l = 0,665 - \frac{(0,665 - 0,599) \cdot 9}{10} = 0,606.$$

В этом случае действительное и допускаемое напряжения соответственно равны:

$$\sigma = \frac{F}{A_2} = \frac{780 \cdot 10^3}{7,54 \cdot 10^{-3}} = 103,4 \text{ МПа},$$

$$\varphi_2^l \cdot R \cdot \gamma_c = 0,606 \cdot 200 \cdot 0,9 = 109 \text{ МПа},$$

т.е. недогрузка составляет 5,13%.

Третье приближение. Задаемся коэффициентом

$$\varphi_3 = \frac{0,575 + 0,606}{2} = 0,591;$$

$$A_3 = \frac{4,33 \cdot 10^{-3}}{\varphi_3} = \frac{4,33 \cdot 10^{-3}}{0,591} = 7,326 \cdot 10^{-3} = 0,007326 \text{ м}^2;$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{A_3}{0,66}} = \sqrt{\frac{0,007326}{0,66}} = 0,105 \text{ м}; \quad \lambda_3 = \frac{10,6}{a_3} = \frac{10,6}{0,105} = 100,95.$$

Тогда коэффициент, соответствующий гибкости  $\lambda_3$  (табл. 13), равен

$$\varphi_3^I = 0,599 - \frac{(0,599 - 0,537) \cdot 0,95}{10} = 0,593.$$

Проверим выполнение условия устойчивости стойки:

$$\sigma = \frac{F}{A_3} = \frac{780 \cdot 10^3}{7,326 \cdot 10^{-3}} = 106,5 \text{ МПа} < \varphi_3^I \cdot R \cdot \gamma_c = 0,593 \cdot 200 \cdot 0,9 = 106,7 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости выполняется, недогрузка составляет 0,18%.

Окончательно принимаем:  $A = 7,326 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ,  $a = 0,105 \text{ м}$ ,

$$J_{\min} = J_y = 0,046 a^4 = 0,0464(0,105)^4 = 5,64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4, \quad \text{гибкость стойки } \lambda_{\max} \approx 101.$$

4. *Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.* Для данной стойки

$$\lambda_{\max} = 101 > \lambda_{\text{пред}} = 100,$$

следовательно, применима формула Эйлера для вычисления критической силы:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5,64 \cdot 10^{-6}}{(1 \cdot 2,8)^2} = 1408 \text{ кН}.$$

Стойка будет работать с коэффициентом запаса устойчивости

$$K = \frac{F_{cr}}{F_n} = \frac{1408}{650} = 2,17,$$

что находится в пределах рекомендуемых значений .

*Ответ:* Размер сечения  $a = 0,105 \text{ м}$ ; значение критической силы  $F = 1408 \text{ кН}$ ; коэффициент запаса устойчивости  $K = 2,17$ .

## УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

## Задача 11

На плоскую раму (рис. 29) с высоты  $h$  падает груз  $G$ .

Исходя из условия прочности, подобрать диаметр поперечного сечения рамы.

Исходные данные взять из таблицы 14.

*Порядок решения задачи 11*

1. Вычертить расчетную схему рамы с соблюдением масштаба.  
2. Определить реакции опор и построить эпюру изгибающего момента  $M$  от статически приложенной силы, равной весу падающего груза.

Найти опасное сечение.

3. Найти перемещение точки соударения по направлению падения груза под действием статически приложенной силы, равной весу груза  $G$ .

4. Записать условие прочности для опасного сечения при ударном нагружении и определить диаметр поперечного сечения стержня. Принять расчетное сопротивление материала изгибу  $R=210$  МПа, коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

Таблица 14

Номер строки	Схема стержня рис. 29	$G$ , Н	$h$ , м	$a$ , м	Номер строки	Схема стержня рис. 29	$G$ , Н	$h$ , м	$a$ , м
1	1	400	0,2	1,2	6	6	300	0,2	1,4
2	2	100	0,6	1,0	7	7	900	0,5	1,8
3	3	700	0,3	1,6	8	8	500	0,3	2,0
4	4	200	0,4	1,3	9	9	600	0,7	1,5
5	5	800	0,8	1,7	0	0	1000	0,4	1,7
	$e$	$z$	$\delta$	$e$		$e$	$z$	$\delta$	$e$

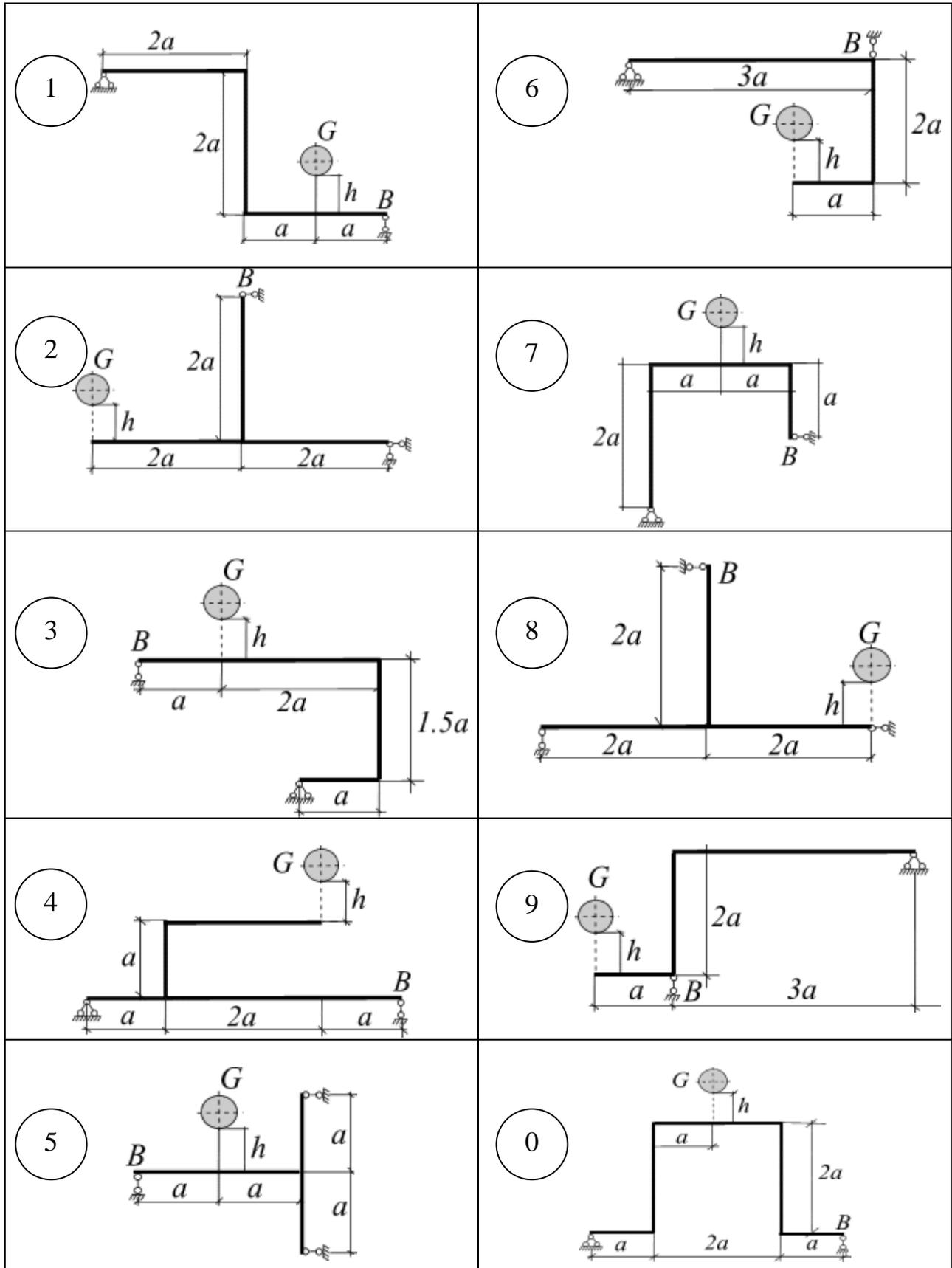


Рис. 29

**Пример 11.** На плоскую раму (рис. 30), стержни которой имеют круглое поперечное сечение, с высоты  $h$  падает груз весом  $G$ .

Требуется:

1. Определить реакции опор от статически приложенной силы  $G$ , равной весу падающего груза, и построить эпюру изгибающего момента  $M$ .
2. Найти перемещение точки соударения по направлению падения груза под действием статически приложенной силы  $G$ , равной весу груза.
3. Определить диаметр поперечного сечения стержня, исходя из условия прочности при ударном нагружении рамы.

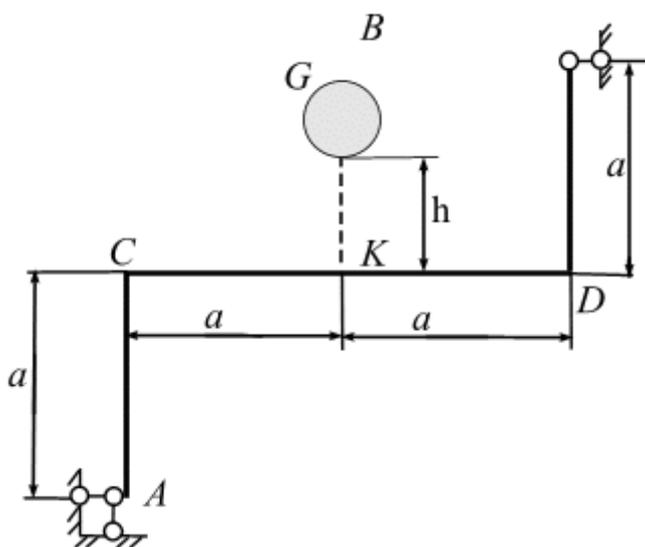


Рис. 30

Дано:  $G=100 \text{ Н}$ ;  $h=0,4 \text{ м}$ ;  $a=0,8 \text{ м}$ ; расчетное сопротивление материала изгибу  $R=210 \text{ МПа}$ , модуль продольной упругости материала  $E=2,05 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коэффициент условий работы  $\gamma_c=1$ .

*Решение*

1. *Определение реакций опор от статически приложенной силы  $G$ , равной весу падающего груза (рис. 31), и построение эпюры изгибающего момента  $M$ .* Запишем уравнения равновесия для грузового состояния:

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0, \quad V_B \cdot 2a - Ga = 0, \quad V_B = \frac{G}{2}; \\ \sum F_y = 0, \quad V_A - G = 0, \quad V_A = G; \\ \sum F_x = 0, \quad H_A - V_B = 0; \quad H_A = \frac{G}{2}. \end{aligned}$$

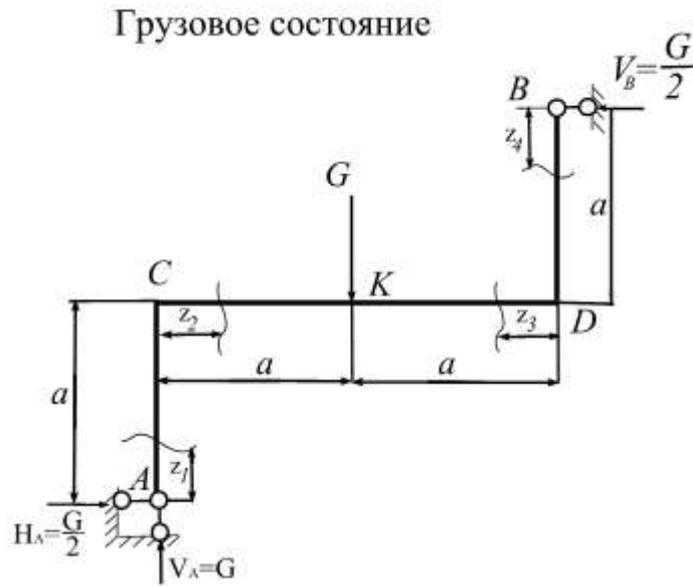


Рис. 31

Разделим раму на четыре участка:  $AC$ ,  $CK$ ,  $BD$  и  $KD$ . На каждом участке в произвольном месте проведем сечение и составим выражения для изгибающего момента.

На участке  $AC$ ,  $0 \leq z_1 \leq a$ :

$$M_1 = H_A \cdot z_1 \text{ (линейный закон);}$$

$$\text{при } z_1=0 \quad M_1=0,$$

$$\text{при } z_1=a \quad M_1 = H_A \cdot a = \frac{G \cdot a}{2} \text{ (растянутые левые волокна).}$$

На участке  $CK$ ,  $0 \leq z_2 \leq a$ :

$$M_2 = H_A \cdot a - V_A \cdot z_2 \text{ (линейный закон);}$$

при  $z_2=0$   $M_2 = H_A \cdot a = \frac{Ga}{2}$  (растянуты верхние волокна),

при  $z_2=a$   $M_2 = \frac{Ga}{2} - Ga = -\frac{Ga}{2}$  (растянуты нижние волокна).

На участке  $BD$ ,  $0 \leq z_3 \leq a$ :

$$M_3 = V_D \cdot z_3 \text{ (линейный закон);}$$

при  $z_3=0$   $M_3=0$ ,

при  $z_3=a$   $M_3 = V_B \cdot a = \frac{Ga}{2}$  (растянуты правые волокна).

На участке  $KD$ ,  $0 \leq z_4 \leq a$ :

$$M_4 = V_B \cdot a = \frac{Ga}{2} \text{ (const) (растянуты нижние волокна).}$$

По найденным значениям построена эпюра  $M$  (рис. 32). Из эпюры находим  $M_{\max} = \frac{Ga}{2}$ .

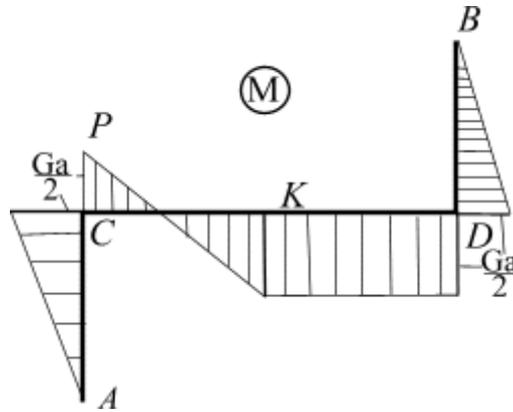


Рис. 32

2. Определение перемещения  $\Delta_{st}$  точки соударения  $K$  по направлению падения груза под действием статически приложенной силы  $G$ , равной весу груза. Приложим к раме в точке  $K$  единичную силу и определим опорные реакции (рис. 33).

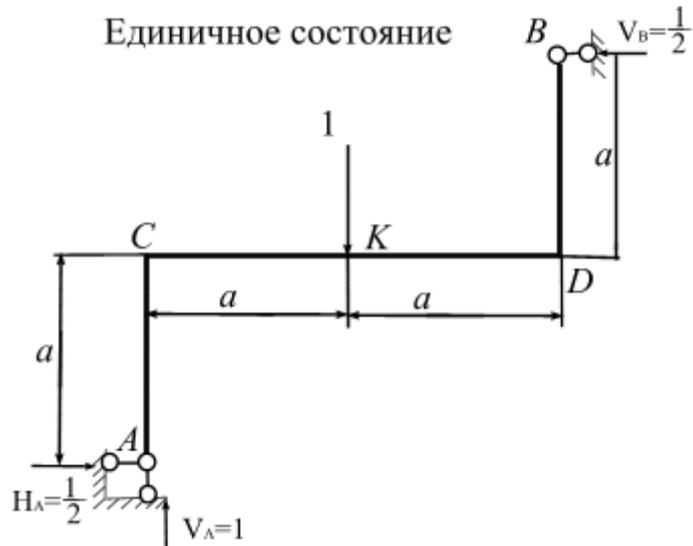


Рис. 33

Построим эпюру  $\bar{M}$  (рис.34) для единичного состояния рамы.

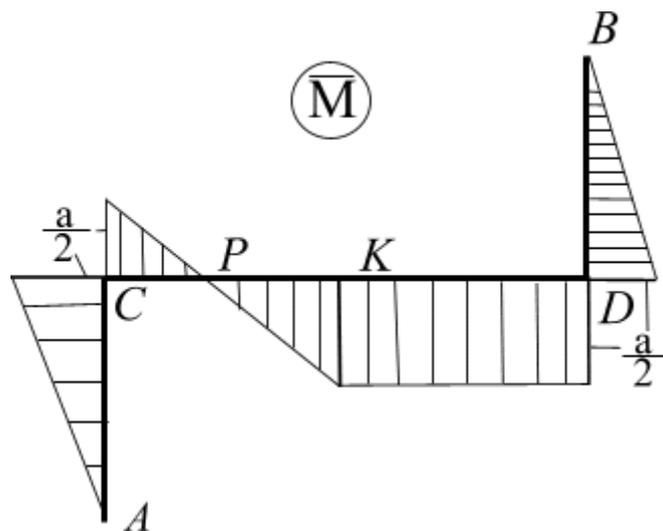


Рис. 34

Перемножив по способу Верещагина эпюры  $M$  и  $\bar{M}$ , найдем искомое перемещение:

$$\Delta_{st} = \frac{1}{EJ} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{Ga}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot 2 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{Ga}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot 2 + \frac{Ga}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right] = \frac{Ga^3}{2EJ}.$$

При перемножении эпюр  $M$  и  $\bar{M}$  учтено, что площади эпюр на участках  $AC$  и  $BD$ ,  $CP$  и  $PK$  равны.

3. *Определение диаметра стержня из условия прочности при ударном нагружении для опасного сечения.* Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \cdot K_d \leq R \cdot \gamma_c,$$

где  $\sigma_{st} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{0,1d^3}$  - напряжение в опасном сечении от статически

приложенной силы, равной весу  $G$  падающего груза;  $W_x$  - осевой момент сопротивления сечения стержня рамы;  $K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{st}}}$  - динамический

коэффициент при ударе;  $\Delta_{st}$  - линейное перемещение точки соударения под действием статически приложенной силы, равной весу падающего груза (по направлению его движения). С учетом сказанного перепишем условие прочности:

$$\frac{M_{\max}}{0,1d^3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\Delta_{st}}} \leq R \cdot \gamma_c.$$

Подставим выражения  $M_{\max}$  и  $\Delta_{st}$ , осевого момента инерции круглого сечения  $J = 0,05d^4$  в условие прочности и определим диаметр стержня:

$$\begin{aligned} \frac{Ga}{2 \cdot 0,1d^3} \cdot \sqrt{\frac{2h \cdot 2E \cdot 0,05d^4}{Ga^3}} &\leq R \gamma_c; \\ d &\geq \frac{Ga}{2 \cdot 0,1d^3 \cdot R \cdot \gamma_c} \cdot \sqrt{\frac{2h \cdot 2E \cdot 0,05}{Ga^3}} = \\ &= \frac{100 \cdot 0,8}{2 \cdot 0,1 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 1} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,4 \cdot 2 \cdot 2,05 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,05}{100 \cdot 0,8^3}} = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \end{aligned}$$

*Ответ:* Искомый диаметр стержня  $d \geq 3,4$  см.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### Задача 12

На балке из двух двутавров установлен электромотор весом  $G$  (рис. 35). Частота вращения ротора мотора  $n$ ; вес неуравновешенных частей  $P$ ; их эксцентриситет  $e$ .

Определить номер профиля двутавра, исходя из условия «отстройки» от резонанса, т. е. частота собственных колебаний балки должна быть на 30% выше частоты возмущающей силы, возникающей из-за неуравновешенности ротора. Проверить прочность и жесткость балки с учетом возникших колебаний. Массой балки пренебречь. Исходные данные взять из табл. 15.

#### Порядок решения задачи 12

1. Определить статический прогиб сечения балки, в котором установлен мотор, а также наибольшие статические напряжения.
2. Установить частоту возмущающей силы и частоту собственных колебаний балки.
3. Определить номер профиля двутавра, исходя из условия «отстройки» от резонанса.
4. Вычислить коэффициент нарастания колебаний и динамический коэффициент.
5. Записать условия прочности и жесткости балки с учетом возникших колебаний и проверить их выполнение. Принять  $R=70 \text{ МПа}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , допускаемый прогиб  $f \bar{=} \ell / 1000$ .

Таблица 15

Номер строки	Схема балки, по рис. 35	$\ell$ , м	$G$ , кН	$P$ , Н	$e$ , см	$n$ , об/мин.
1	1	2,2	8	800	0,10	500
2	2	2,4	9	1000	0,12	550
3	3	2,6	10	1200	0,14	600
4	4	2,8	11	1400	0,16	650
5	5	3,0	12	1500	0,18	700
6	6	3,2	13	1600	0,20	800
7	7	3,4	14	1800	0,22	850
8	8	3,6	15	2000	0,25	900
9	9	3,8	16	2200	0,28	950
	10	4,0	17	2400	0,30	980
	$e$	$a$	$z$	$\delta$	$e$	$\delta$

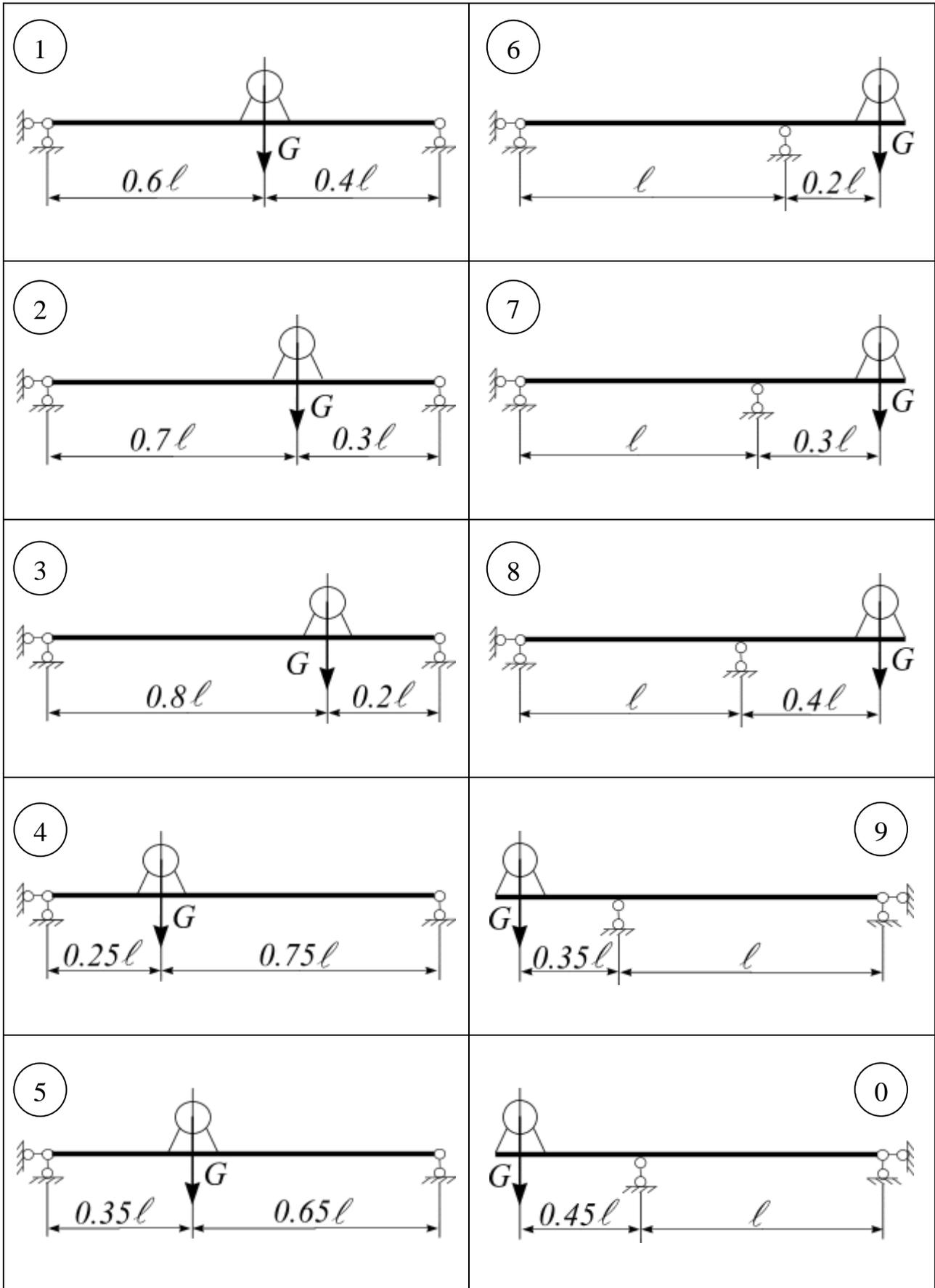


Рис. 35

**Пример 12.** На балке из двух двутавров установлен электромотор весом  $G$  (рис. 36). Частота вращения ротора  $n$ ; вес неуравновешенных частей ротора -  $P$ ; их эксцентриситет -  $e$ .

*Требуется:*

1. Найти статический прогиб сечения балки  $C$ , в котором установлен мотор, а также наибольшие статические напряжения. Массой балки пренебречь.
2. Определить частоту возмущающей силы и частоту собственных колебаний балки.
3. Установить номер профиля двутавра, исходя из условия «отстройки» от резонанса, т. е. частота собственных колебаний балки должна быть на 30% выше частоты возмущающей силы, возникающей из-за неуравновешенности ротора.
4. Вычислить коэффициент нарастания колебаний и динамический коэффициент.
5. Проверить прочность и жесткость балки с учетом возникающих колебаний.

Дано:  $\ell = 3,1 \text{ м}$ ;  $G = 12,5 \text{ кН}$ ;  $P = 1400 \text{ Н}$ ;  $e = 0,5 \text{ см}$ ;  $n = 720 \text{ об/мин}$ ; расчетное сопротивление материала балки изгибу  $R = 70 \text{ МПа}$ , модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; допустимый прогиб балки  $f = \frac{\ell}{1000}$ ;

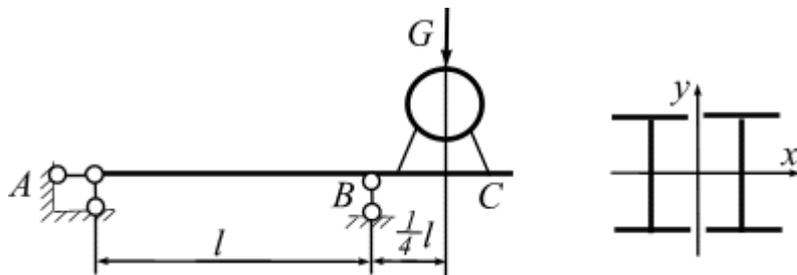


Рис. 36

## Решение

1. *Статический расчет.* Найдем статический прогиб сечения в точке  $C$  балки от силы  $G$ , равной весу двигателя. Для грузового состояния (рис. 37, а) определим реакции опор и построим эпюру  $M_F$  (рис. 37, б).

Составим единичную схему, прикладывая безразмерную силу, равную единице, в точке  $C$  балки, освобожденной от нагрузки (рис. 37, в). Определим реакции опор и построим эпюру  $\bar{M}$  (рис. 37, г).

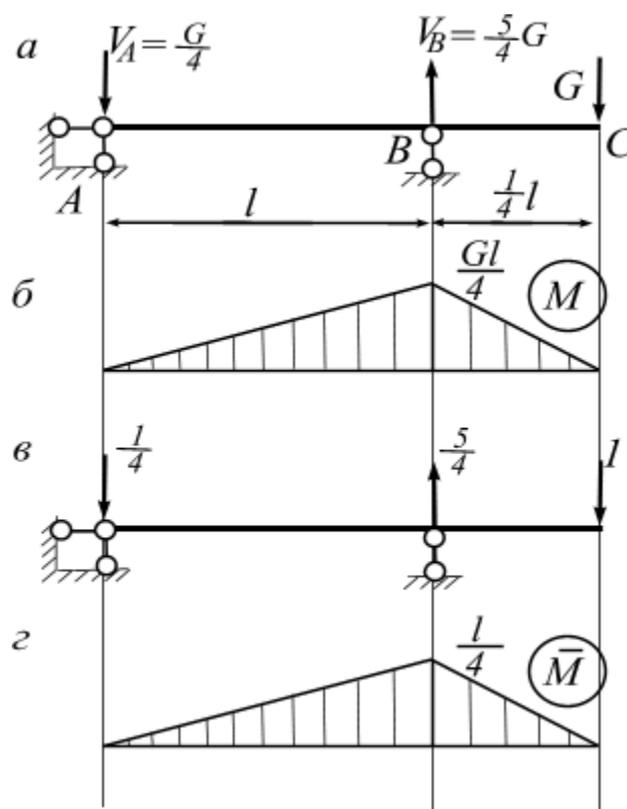


Рис. 37

Перемножив эпюры  $M_F$  и  $\bar{M}$  по способу Верещагина найдем прогиб в точке  $C$ :

$$y_{st} = \frac{1}{E2J_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{Gl}{4} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Gl}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{5Gl^3}{384EJ_x};$$

Найдем наибольшее статическое напряжение. В опасном сечении  $B$  значение изгибающего момента равно

$$M_{\max} = \frac{Gl}{4}.$$

Тогда статическое напряжение равно

$$\sigma_{st} = \frac{M_{\max}}{2W_x} = \frac{Gl}{4 \cdot 2W_x} = \frac{Gl}{8W_x}.$$

1. *Определение частоты возмущающей силы и частоты собственных колебаний балки.* Из-за неуравновешенности ротора возникает возмущающая сила, и балка испытывает вынужденные колебания с частотой

$$\theta = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 720}{30} = 75,36 \text{ 1/c}.$$

Частота собственных колебаний балки зависит от ее жесткости, определяется она по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}},$$

где  $g$  - ускорение свободного падения.

В соответствие с условием задачи принимаем частоту собственных колебаний равной

$$\omega = 1,3\theta, \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} = 1,3\theta.$$

2. *Определение номера двутавра.* Запишем условие «отстройки» от резонанса:

$$\omega \geq 1,3\theta, \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} \geq 1,3\theta.$$

Преобразуем полученное неравенство и, подставив выражение  $y_{st}$ , определим необходимый момент инерции двутавра:

$$\frac{g}{y_{st}} \geq 1,3\theta^2, \quad \frac{g \cdot 384EJ_x}{5Gl^3} \geq 1,3\theta^2,$$

Отсюда

$$J_x = \frac{5Gl^3 \cdot 1,3\theta^2}{g \cdot 384E} = \frac{5 \cdot 12,5 \cdot 10^3 \cdot 3,1^3 \cdot 1,3^2 \cdot 75,36^2}{9,81 \cdot 384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 2374 \text{ см}^4.$$

Из сортамента выбираем двутавр №22 с  $J_x=2550 \text{ см}^4$ ,  $W_x=232 \text{ см}^3$ .

Найдем частоту собственных колебаний балки, соответствующую выбранному сечению двутавру №22:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} = \sqrt{\frac{g \cdot 384 E J_x}{5 G \ell^3}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2550 \cdot 10^8}{5 \cdot 12,5 \cdot 10^3 \cdot 3,1^3}} = 101,6 \text{ 1/c.}$$

То есть условие «отстройки»  $\omega \geq 1,3\theta$  выполняется. Действительно

$$\omega = 101,6 \triangleright 1,3 \cdot \theta = 1,3 \cdot 75,36 = 98.$$

3. Определим коэффициент нарастания колебаний:

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{75,36}{101,6}\right)^2} = 2,22.$$

Наибольшее значение возмущающей силы (вертикальная составляющая центробежной силы инерции):

$$P_o = \frac{P}{g} \cdot \theta^2 \cdot e = \frac{1400}{9,81} \cdot 75,36^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} = 4052 \text{ Н.}$$

Динамический коэффициент:

$$K_d = 1 + \frac{P_o}{G} \beta = 1 + \frac{4052}{12500} \cdot 2,22 = 1,72.$$

4. *Динамический расчет.* Запишем условие прочности балки и проверим его выполнение:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \cdot K_d \leq R.$$

Динамическое напряжение в опасном сечении балки

$$\sigma_d = \frac{G \ell}{8 W_x} \cdot K_d = \frac{12,5 \cdot 10^3 \cdot 3,1}{8 \cdot 232 \cdot 10^{-6}} \cdot 1,72 = 36 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_d = 36 \text{ МПа} \triangleleft R = 70 \text{ МПа,}$$

т.е. условие прочности выполняется.

Запишем условие жесткости балки:

$$y_d = y_{st} \cdot K_d \leq \bar{f} :$$

Динамический прогиб балки в сечении C:

$$y_d = \frac{5G\ell^3}{384EJ_x} \cdot K_d = \frac{5 \cdot 12,5 \cdot 10^3 \cdot 3,1^3}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} \cdot 1,72 = 0,00163 \text{ м}$$

Допускаемый прогиб  $\bar{f} = \frac{3,1}{1000} = 0,0031 \text{ м}$ . Тогда

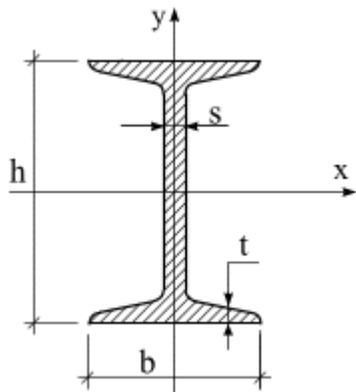
$$y_d = 0,00163 \text{ м} < \bar{f} = 0,0031 \text{ м},$$

т.е. условие жесткости балки выполняется.

*Ответ:* Необходимый номер профиля двутавра - №22.



Двутавры стальные горячекатанные (по ГОСТ 8240-89)



$h$  – высота двутавра;

$b$  – ширина полки;

$s$  – толщина стенки;

$t$  – средняя толщина полки;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$J$  – момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$S$  – статический момент полу-  
сечения;

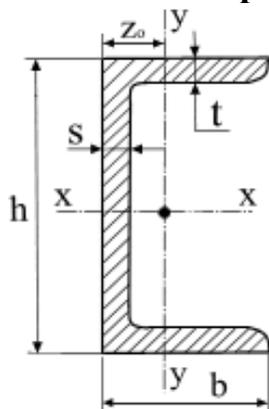
$i$  – радиус инерции.

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$
		$h$	$b$	$s$	$t$								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$
		$h$	$b$	$s$	$t$								
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

## Швеллеры стальные горячекатанные (по ГОСТ 8239-89)

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2



$h$  – высота швеллера;

$b$  – ширина полки;

$s$  – толщина стенки;

$t$  – средняя толщина полки;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$J$  – момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$S$  – статический момент полу-сечения;

$i$  – радиус инерции;

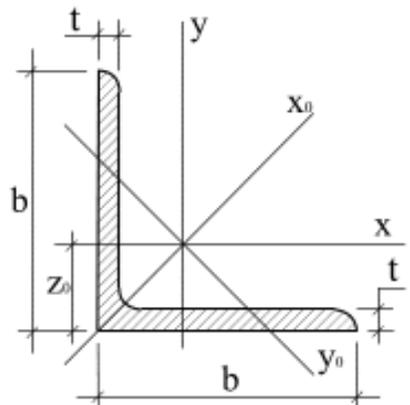
$z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,5	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,00	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	10	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$z_0, \text{см}$
		$h$	$b$	$s$	$t$									
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,6	2,6	2,42
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

## Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3



$b$  – ширина полки;

$t$  – толщина полки;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$J$  – момент инерции;

$i$  – радиус инерции;

$J_{xy}$  – центробежный момент инерции;

$z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани полки.

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
	1,15		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73
	1,46		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76
	1,78		5	2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,69	0,80
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80
3	1,36	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85
	1,78		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
	2,18		5	2,78	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89
	1,91		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97
	2,10		4	2,17	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01
	2,58		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
4	1,85	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
	2,42		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13
	2,98		5	3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17
	3,52		6	4,48	6,41	1,20	10,13	1,50	2,70	0,78	3,72	1,21
4,5	2,08	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21
	2,73		4	3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26
	3,37		5	4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,30
	3,90		6	5,08	9,35	1,36	14,80	1,71	3,90	0,88	5,45	1,34
5	2,32	50	3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
	3,05		4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
	4,47		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
	5,15		7	6,56	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50
	5,82		8	7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,52	1,53
5,6	3,44	56	4	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6	3,71	60	4	4,72	16,21	1,85	25,69	2,33	6,72	1,19	9,48	1,62
	4,58		5	5,33	19,79	1,84	31,40	2,32	8,18	1,18	11,61	1,66
	5,43		6	6,92	23,21	1,83	36,81	2,31	9,60	1,18	13,60	1,70
	7,10		8	9,04	29,55	1,81	46,77	2,27	12,34	1,17	17,22	1,78
	8,70		10	11,08	35,32	1,79	55,64	2,24	15,00	1,16	20,32	1,85
6,3	3,9	63	4	4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69
	4,81		5	6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74
	5,72		6	7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,90	1,78
6,5	5,91	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83
	7,73		8	9,84	38,13	1,97	60,42	2,48	15,85	2,48	22,29	1,90
7	4,87	70	4,5	6,20	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88

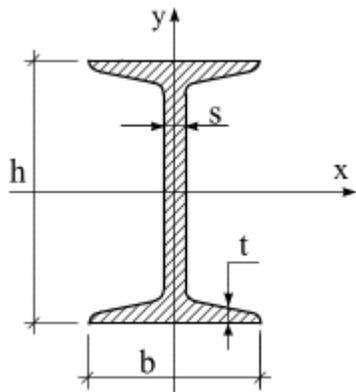
Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\text{max}}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\text{max}}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\text{max}}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\text{max}}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
7	5,38	70	5	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90
	6,39		6	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94
	7,39		7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99
	8,37		8	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02
	10,29		10	13,11	57,90	2,10	91,52	2,64	24,27	1,36	33,60	2,10
7,5	5,8	75	5	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,10	2,02
	6,89		6	8,78	46,57	2,36	73,87	2,90	19,28	1,48	27,30	2,06
	7,96		7	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,48	31,20	2,10
	9,02		8	11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15
	10,07		9	12,83	66,10	2,27	107,72	2,86	27,48	1,46	38,00	2,18
8	6,78	80	5,5	8,63	52,63	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	30,90	2,17
	7,36		6	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	33,40	2,19
	8,51		7	10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	38,30	2,23
	9,65		8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27
	11,88		10	15,14	88,58	2,42	140,31	3,04	36,85	1,56	56,70	2,35
	14,05		12	17,90	102,74	2,40	162,39	3,01	43,21	1,55	59,50	2,42
9	8,33	90	6	10,61	82,10	2,78	130,00	3,50	33,97	1,79	48,10	2,43
	9,64		7	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	55,40	2,47
	10,93		8	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51
	12,20		9	15,60	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	68,00	2,55
	13,48		10	17,17	128,60	2,74	203,93	3,45	53,27	1,76	75,30	2,59
	15,96		12	20,33	149,67	2,71	235,88	3,41	62,40	1,75	86,20	2,67
10	10,06	100	6,5	12,82	122,10	3,09	193,46	3,89	50,73	1,99	71,40	2,68
	10,79		7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71
	12,25		8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75
	15,10		10	19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110	2,83
	17,90		12	22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,84	1,95	122	2,91

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
10	20,63	100	14	26,28	237,15	2,99	374,98	3,78	99,32	1,94	138	2,99
	21,97		15	27,99	250,68	2,98	395,87	3,76	105,48	1,94	145	3,03
	23,30		16	29,68	263,82	3,40	416,04	3,74	111,61	1,94	152	3,06
11	11,89	110	7	15,15	175,61	3,40	278,54	4,29	72,68	2,19	106	2,96
	13,50		8	17,20	198,17	3,39	314,51	4,28	81,83	2,18	116	3,00
12	14,76	120	8	18,80	259,75	3,72	412,45	4,68	107,04	2,39	153	3,25
	18,24		10	23,24	317,16	3,69	503,79	4,66	130,54	2,37	187	3,33
	21,67		12	27,60	371,80	3,67	590,28	4,62	153,33	2,36	218	3,44
	26,68		15	33,99	448,90	3,63	711,32	4,57	186,48	2,34	262	3,53
12,5	15,46	125	8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	172	3,36
	17,30		9	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	192	3,40
	19,10		10	24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211	3,45
	22,68		12	28,89	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	248	3,53
	26,20		14	33,37	481,76	3,80	763,90	4,78	199,62	2,45	282	3,61
	29,55		16	37,77	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	315	3,68
14	19,41	140	9	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	274	3,78
	21,45		10	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	301	3,82
	25,50		12	32,49	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	354	3,90
15	23,02	150	10	29,33	634,76	4,65	1008,56	5,86	260,97	2,98	374	4,07
	27,39		12	34,89	747,48	4,63	1187,86	5,83	307,09	2,97	440	4,15
	33,82		15	43,08	908,38	4,59	1442,60	5,79	374,17	2,95	534	4,27
	40,11		18	51,09	1060,1	4,56	1680,92	5,74	439,24	2,93	621	4,38
16	24,67	160	10	31,43	774,2	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	455	4,30
	27,02		11	34,42	844,2	4,95	1340,66	6,24	317,77	3,18	496	4,35
	29,35		12	37,39	912,9	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	537	4,39
	33,97		14	43,57	1046,5	4,92	1662,13	6,2	430,81	3,16	615	4,47
	38,52		16	49,07	1175,2	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	690	4,55

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
16	43,01	160	18	54,79	1290,2	4,87	2061,03	3,16	537,46	3,13	771	4,63
	47,44		20	60,40	1418,8	4,85	2248,26	6,10	589,43	3,12	830	4,70
18	30,47	180	11	38,80	1216,4	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	716	4,85
	33,12		12	42,19	1316,6	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	776	4,89
	40,96		15	52,18	1607,4	5,55	2554,99	7,00	659,73	3,56	948	5,01
	48,66		18	61,99	1884,1	5,51	2992,69	6,95	775,44	3,54	1108	5,13
	53,72		20	68,43	2061,1	5,49	3271,31	6,91	850,92	3,53	1210	5,20
20	36,97	200	12	47,10	1822,8	6,22	2806,16	7,84	749,40	3,99	1073	5,37
	39,92		13	50,85	1960,8	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	1156	5,42
	42,80		14	54,60	2097,0	6,20	3333,00	7,81	861,60	3,97	1236	5,46
	48,65		16	61,98	2362,6	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	1393	5,54
	54,40		18	69,30	2620,6	6,15	4164,54	7,75	1076,74	3,94	1544	5,62
	60,08		20	76,54	2871,5	6,12	4560,42	7,72	1181,92	3,93	1689	5,70
	71,26		24	90,78	3350,7	6,08	5313,59	7,65	1387,73	3,91	1963	5,85
	74,20		25	94,29	3466,2	6,06	5494,04	7,63	1438,38	3,91	2028	5,89
87,56	30	111,5	4019,6	6,00	6351,05	7,55	1698,16	3,89	2332	6,07		
22	47,40	220	14	60,38	2814,4	6,83	4470,15	8,60	1158,56	4,38	1655	5,91
	53,83		16	68,58	3175,4	6,80	5045,37	8,58	1305,02	4,36	1862	6,02
25	61,55	250	16	78,40	4717,1	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775	6,75
	68,56		18	87,72	5247,2	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	3089	6,83
	76,11		20	96,96	5764,9	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	3395	6,91
	83,31		22	106,1	6270,3	7,69	9961,60	6,69	2579,04	4,93	3691	7,00
	93,97		25	119,7	7006,4	7,65	11125,5	9,64	2887,26	4,91	4119	7,11
	104,5		28	133,1	7716,9	7,61	12243,8	9,59	3189,89	4,90	4527	7,23
	111,4		30	142,0	8176,5	7,59	12964,7	9,56	3388,98	4,89	4788	7,31
	128,5		35	163,7	9281,0	7,53	14682,7	9,47	3879,37	4,87	5402	7,49



Двутавры стальные горячекатанные (по ГОСТ 8240-89)



$h$  – высота двутавра;

$b$  – ширина полки;

$s$  – толщина стенки;

$t$  – средняя толщина полки;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$J$  – момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$S$  – статический момент полу-  
сечения;

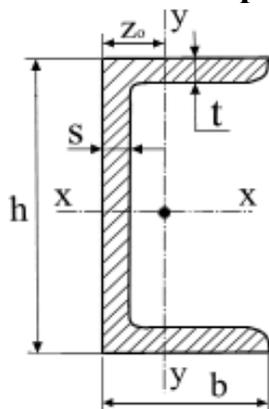
$i$  – радиус инерции.

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$
		$h$	$b$	$s$	$t$								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$
		$h$	$b$	$s$	$t$								
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

## Швеллеры стальные горячекатанные (по ГОСТ 8239-89)

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2



$h$  – высота швеллера;

$b$  – ширина полки;

$s$  – толщина стенки;

$t$  – средняя толщина полки;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$J$  – момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$S$  – статический момент полу-сечения;

$i$  – радиус инерции;

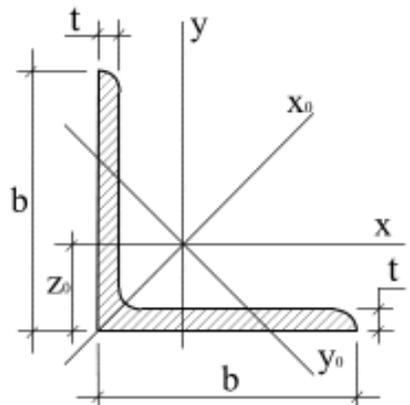
$z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,5	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,00	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	10	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$z_0, \text{см}$
		$h$	$b$	$s$	$t$									
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,6	2,6	2,42
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)

ПРИЛОЖЕНИЕ 3



$b$  – ширина полки;  
 $t$  – толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $J$  – момент инерции;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $J_{xy}$  – центробежный момент инерции;  
 $z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани полки.

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
	1,15		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73
	1,46		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76
	1,78		5	2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,69	0,80
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80
3	1,36	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85
	1,78		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
	2,18		5	2,78	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89
	1,91		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97
	2,10		4	2,17	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01
	2,58		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
4	1,85	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
	2,42		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13
	2,98		5	3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17
	3,52		6	4,48	6,41	1,20	10,13	1,50	2,70	0,78	3,72	1,21
4,5	2,08	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21
	2,73		4	3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26
	3,37		5	4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,30
	3,90		6	5,08	9,35	1,36	14,80	1,71	3,90	0,88	5,45	1,34
5	2,32	50	3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
	3,05		4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
	4,47		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
	5,15		7	6,56	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50
	5,82		8	7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,52	1,53
5,6	3,44	56	4	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6	3,71	60	4	4,72	16,21	1,85	25,69	2,33	6,72	1,19	9,48	1,62
	4,58		5	5,33	19,79	1,84	31,40	2,32	8,18	1,18	11,61	1,66
	5,43		6	6,92	23,21	1,83	36,81	2,31	9,60	1,18	13,60	1,70
	7,10		8	9,04	29,55	1,81	46,77	2,27	12,34	1,17	17,22	1,78
	8,70		10	11,08	35,32	1,79	55,64	2,24	15,00	1,16	20,32	1,85
6,3	3,9	63	4	4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69
	4,81		5	6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74
	5,72		6	7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,90	1,78
6,5	5,91	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83
	7,73		8	9,84	38,13	1,97	60,42	2,48	15,85	2,48	22,29	1,90
7	4,87	70	4,5	6,20	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17,00	1,88

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
7	5,38	70	5	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90
	6,39		6	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94
	7,39		7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99
	8,37		8	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,20	2,02
	10,29		10	13,11	57,90	2,10	91,52	2,64	24,27	1,36	33,60	2,10
7,5	5,8	75	5	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,10	2,02
	6,89		6	8,78	46,57	2,36	73,87	2,90	19,28	1,48	27,30	2,06
	7,96		7	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,48	31,20	2,10
	9,02		8	11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	35,00	2,15
	10,07		9	12,83	66,10	2,27	107,72	2,86	27,48	1,46	38,00	2,18
8	6,78	80	5,5	8,63	52,63	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	30,90	2,17
	7,36		6	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	33,40	2,19
	8,51		7	10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	38,30	2,23
	9,65		8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27
	11,88		10	15,14	88,58	2,42	140,31	3,04	36,85	1,56	56,70	2,35
	14,05		12	17,90	102,74	2,40	162,39	3,01	43,21	1,55	59,50	2,42
9	8,33	90	6	10,61	82,10	2,78	130,00	3,50	33,97	1,79	48,10	2,43
	9,64		7	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	55,40	2,47
	10,93		8	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51
	12,20		9	15,60	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	68,00	2,55
	13,48		10	17,17	128,60	2,74	203,93	3,45	53,27	1,76	75,30	2,59
	15,96		12	20,33	149,67	2,71	235,88	3,41	62,40	1,75	86,20	2,67
10	10,06	100	6,5	12,82	122,10	3,09	193,46	3,89	50,73	1,99	71,40	2,68
	10,79		7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71
	12,25		8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75
	15,10		10	19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110	2,83
	17,90		12	22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,84	1,95	122	2,91

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
10	20,63	100	14	26,28	237,15	2,99	374,98	3,78	99,32	1,94	138	2,99
	21,97		15	27,99	250,68	2,98	395,87	3,76	105,48	1,94	145	3,03
	23,30		16	29,68	263,82	3,40	416,04	3,74	111,61	1,94	152	3,06
11	11,89	110	7	15,15	175,61	3,40	278,54	4,29	72,68	2,19	106	2,96
	13,50		8	17,20	198,17	3,39	314,51	4,28	81,83	2,18	116	3,00
12	14,76	120	8	18,80	259,75	3,72	412,45	4,68	107,04	2,39	153	3,25
	18,24		10	23,24	317,16	3,69	503,79	4,66	130,54	2,37	187	3,33
	21,67		12	27,60	371,80	3,67	590,28	4,62	153,33	2,36	218	3,44
	26,68		15	33,99	448,90	3,63	711,32	4,57	186,48	2,34	262	3,53
12,5	15,46	125	8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	172	3,36
	17,30		9	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	192	3,40
	19,10		10	24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211	3,45
	22,68		12	28,89	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	248	3,53
	26,20		14	33,37	481,76	3,80	763,90	4,78	199,62	2,45	282	3,61
	29,55		16	37,77	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	315	3,68
14	19,41	140	9	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	274	3,78
	21,45		10	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	301	3,82
	25,50		12	32,49	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	354	3,90
15	23,02	150	10	29,33	634,76	4,65	1008,56	5,86	260,97	2,98	374	4,07
	27,39		12	34,89	747,48	4,63	1187,86	5,83	307,09	2,97	440	4,15
	33,82		15	43,08	908,38	4,59	1442,60	5,79	374,17	2,95	534	4,27
	40,11		18	51,09	1060,1	4,56	1680,92	5,74	439,24	2,93	621	4,38
16	24,67	160	10	31,43	774,2	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	455	4,30
	27,02		11	34,42	844,2	4,95	1340,66	6,24	317,77	3,18	496	4,35
	29,35		12	37,39	912,9	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	537	4,39
	33,97		14	43,57	1046,5	4,92	1662,13	6,2	430,81	3,16	615	4,47
	38,52		16	49,07	1175,2	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	690	4,55

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{x_0}^{\max}, \text{см}$	$J_{y_0}^{\max}, \text{см}^4$	$i_{y_0}^{\max}, \text{см}$	$ J_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
		$b$	$t$									
16	43,01	160	18	54,79	1290,2	4,87	2061,03	3,16	537,46	3,13	771	4,63
	47,44		20	60,40	1418,8	4,85	2248,26	6,10	589,43	3,12	830	4,70
18	30,47	180	11	38,80	1216,4	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	716	4,85
	33,12		12	42,19	1316,6	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	776	4,89
	40,96		15	52,18	1607,4	5,55	2554,99	7,00	659,73	3,56	948	5,01
	48,66		18	61,99	1884,1	5,51	2992,69	6,95	775,44	3,54	1108	5,13
	53,72		20	68,43	2061,1	5,49	3271,31	6,91	850,92	3,53	1210	5,20
20	36,97	200	12	47,10	1822,8	6,22	2806,16	7,84	749,40	3,99	1073	5,37
	39,92		13	50,85	1960,8	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	1156	5,42
	42,80		14	54,60	2097,0	6,20	3333,00	7,81	861,60	3,97	1236	5,46
	48,65		16	61,98	2362,6	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	1393	5,54
	54,40		18	69,30	2620,6	6,15	4164,54	7,75	1076,74	3,94	1544	5,62
	60,08		20	76,54	2871,5	6,12	4560,42	7,72	1181,92	3,93	1689	5,70
	71,26		24	90,78	3350,7	6,08	5313,59	7,65	1387,73	3,91	1963	5,85
	74,20		25	94,29	3466,2	6,06	5494,04	7,63	1438,38	3,91	2028	5,89
87,56	30	111,5	4019,6	6,00	6351,05	7,55	1698,16	3,89	2332	6,07		
22	47,40	220	14	60,38	2814,4	6,83	4470,15	8,60	1158,56	4,38	1655	5,91
	53,83		16	68,58	3175,4	6,80	5045,37	8,58	1305,02	4,36	1862	6,02
25	61,55	250	16	78,40	4717,1	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775	6,75
	68,56		18	87,72	5247,2	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	3089	6,83
	76,11		20	96,96	5764,9	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	3395	6,91
	83,31		22	106,1	6270,3	7,69	9961,60	6,69	2579,04	4,93	3691	7,00
	93,97		25	119,7	7006,4	7,65	11125,5	9,64	2887,26	4,91	4119	7,11
	104,5		28	133,1	7716,9	7,61	12243,8	9,59	3189,89	4,90	4527	7,23
	111,4		30	142,0	8176,5	7,59	12964,7	9,56	3388,98	4,89	4788	7,31
	128,5		35	163,7	9281,0	7,53	14682,7	9,47	3879,37	4,87	5402	7,49

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1995. 560 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1989. 629 с.
3. Справочные материалы к лабораторно-практическим занятиям по сопротивлению материалов / Т.П. Мартынова – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 31 с.
4. Сопротивление материалов. Расчет бруса на сложное сопротивление: практикум/ А.В. Колесников, Н.В. Новикова. – Красноярск: СФУ.2011.- 84с.
5. Сопротивление материалов в примерах и задачах ч.1: учебное пособие / Т.П. Мартынова, Н.В. Новикова – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011.- 178с.
6. Сопротивление материалов в примерах и задачах ч.2: учебное пособие / - Т.П. Мартынова, Е.А. Чабан – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 170с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие указания.....	3
Программа курса.....	4
Порядок выполнения контрольных работ.....	15
ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ	
Растяжение и сжатие	
Задача 1.....	17
Задача 2.....	22
Задача 3.....	27
Геометрические характеристики	
Задача 4.....	32
Прямой изгиб	
Задача 5.....	37
Задача 6.....	48
Косой изгиб	
Задача 7.....	53
Внецентренное сжатие	
Задача 8.....	61
Изгиб с кручением	
Задача 9.....	67
Устойчивость сжатого стержня	
Задача 10.....	72
Ударное нагружение	
Задача 11.....	79
Вынужденные колебания	
Задача 12.....	86
Приложение.....	93
Библиографический список.....	102