Министерство образования и науки РФ
Ачинский филиал
федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Сибирский федеральный университет»

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ № 7, 8

(для студентов специальностей
080502.65, 080100. 62. 09, 080200.62.13, 080200.62.11
заочной формы обучения)

Ачинск, 2012

Составители: С. П. Крум
М. В. Янченко

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 7

Краткие теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Решение дифференциального уравнения называется общим, если оно содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, а функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются частными решениями этого уравнения.

Отыскание частного решения дифференциального уравнения n-го порядка
(n =1,2,3,…), удовлетворяющего n начальным условиям вида

$$y(x_0)=y_0;\ y'(x_0)=y'_0;\ y''(x_0)=y''_0;\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

называется задачей Коши.

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx+f_2(x)\varphi_2(y)dy=0$$

относится к типу уравнений с разделяющимися переменными. Если ни одна из функций $f_1(x), f_2(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ не равна тождественно нулю, то в результате деления исходного уравнения на $f_2(x)\varphi_1(y)$ оно приводится к виду

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0.$$

Уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т.е. уравнение вида $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными посредством введения новой функции u

$$\left(\frac{y}{x}=u,\quad y=u\cdot x,\quad y'=u+x\cdot\frac{du}{dx}\right).$$

Уравнение вида $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ известные функции от x, линейное относительно функции y и её производной y' называется линейным. Посредством замены функции y произведением вспомогательных функций $y=uv$ $(y'=u'v+uv')$ уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Линейным однородным уравнением называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

все члены которого, первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - известные функции от аргумента x или постоянные.

Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - линейно независимые частные решения этого уравнения.

Если все коэффициенты p_i линейного однородного уравнения постоянны, то его общее решение находится с помощью характеристического уравнения

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_{n-1} r + p_n = 0,$$

которое получается из этого уравнения, если сохраняя в нем все коэффициенты p_i, заменить функцию y единицей, а все ее производные соответственно степенями r. При этом:

1) если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения действительны и различны (однократны), то общее решение уравнения выражается формулой
$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$
2) если характеристическое уравнение имеет пару однократных комплексных сопряженных корней $r_{1.2} = \alpha \pm \beta i$, то в формуле соответствующая пара членов заменяется слагаемым
$$e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$
3) если действительный корень r_1 уравнения имеет кратность $k(r_1 = r_2 = \ldots = r_k)$, то соответствующие k членов заменяются слагаемым
$$e^{r_1 x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_k x^{k-1}\right)$$
4) если пара комплексных сопряженных корней $r_{1.2} = \alpha \pm \beta i$ имеет кратность k, то соответствующие k пар членов заменяются слагаемым
$$e^{\alpha x}\left[\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)\cos \beta x + \left(C_{k+1} + C_{k+2} + \ldots + C_{2k} x^{k-1}\right)\sin \beta x\right]$$

Система двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11} x + a_{12} y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21} x + a_{22} y. \end{cases},$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – постоянные, t – аргумент, x, y – искомые функции.

Решение типовых задач

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' + y = 1.$$

Решение: Разделим обе части уравнения на x

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Уравнение решается посредством подстановки $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ неизвестные функции, одна из которой может быть выбрана произвольно. Тогда

$$y' = (v \cdot u)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Подставим y' и y в данное уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x},$$

которое преобразуется к виду

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x}$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и вынесем общий множитель за скобку

$$u'v + \left(uv' + \frac{uv}{x}\right) = \frac{1}{x}; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Так как одна из вспомогательных функций взята произвольно, то выберем в качестве v какое – либо частное решение уравнения

$$v' + x\frac{v}{x} = 0.$$

Получим $\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Решим отдельно уравнение $v' + \dfrac{v}{x} = 0$ (уравнение с разделяющимися переменными)

Разделим переменные $\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{v}{x} = 0$; $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x}$; $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$

Почленно интегрируя, получим искомое частное решение

$$\ln v = -\ln x; \quad \ln v = \ln\frac{1}{x}; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Подставим полученное выражение $\frac{1}{x}$ вместо v в уравнение $u'v = \frac{1}{x}$

$u'\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ (уравнение с разделяющимися переменными), $u' = 1$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{du}{dx} = 1; \quad du = dx; \quad \int du = \int dx;$$

$u = x + C$-общий интеграл уравнения $u'v = \frac{1}{x}$.

Поскольку $y = uv$, то $y = (x + C)\cdot\frac{1}{x}$; $y = 1 + \frac{C}{x}$ - общее решение линейного дифференциального уравнения

Замечание. Для проверки правильности ответа можно сделать проверку: найдем y' и подставим в уравнение y и y', в результате чего получится верное тождество

$y' = -\frac{C}{x^2}$; $x\left(-\frac{C}{x^2}\right) + 1 + \frac{C}{x} = 1$; $-\frac{C}{x} + 1 + \frac{C}{x} = 1$; $1 = 1$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'\sin x - y\cos x = 1$.

Решение: Разделим обе части уравнения на $\sin x$ и получим уравнение

$y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$ (линейное дифференциальное уравнение первого порядка)

Сделаем подстановку $y = u\cdot v$, тогда $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Подставим y' и y, выраженные через u, v, u', v', в исходное уравнение:

$u'v + uv' - uv\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$. После преобразования имеем уравнение вида: $u'v + u(v' - v\frac{\cos x}{\sin x}) = \frac{1}{\sin x}$.

Перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} v' - v\dfrac{\cos x}{\sin x} = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

$v' - v\frac{\cos x}{\sin x} = 0$ (уравнение с разделяющимися переменными).

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$v' = v\dfrac{\cos x}{\sin x}$; $\quad \dfrac{dv}{dx} = v\dfrac{\cos x}{\sin x}$; $\quad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$; $\quad \int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$;

$\int\dfrac{dv}{v} = \int\dfrac{d(\sin x)}{\sin x}$;

$\ln v = \ln\sin x$; $\quad v = \sin x$.

Подставим $\sin x$ вместо v в уравнение $u'v = \dfrac{1}{\sin x}$, $\dfrac{du}{dx}\sin x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Разделим переменные $du = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$ и, интегрируя обе части, получим

$\int du = \int\dfrac{dx}{\sin^2 x}$,

$u = -ctgx + C$ - общее решение уравнения $u'\sin x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Так как $y = uv$, то получается $y = \sin x\cdot(-ctgx + C)$.

Таким образом, $y = -\cos x + C\cdot\sin x$ есть общее решение уравнения.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

Решение: Разделим обе части уравнения x и получим уравнение

$y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$ (однородное дифференциальное уравнение). Сделаем подстановку

$\dfrac{y}{x} = u, y = ux$, тогда $y' = u + xu'$ и подставим в уравнение $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$, $\quad u = \dfrac{y}{x}$;

$u + x\dfrac{du}{dx} = u\ln u$; $\quad x\dfrac{du}{dx} = u\ln u - u$

Разделим переменные и, интегрируя обе части, получим

$\dfrac{du}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{dx}{x}$; $\quad \int\dfrac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\dfrac{dx}{x}$

Вычислим отдельно

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \left|\begin{matrix}\ln u = t\\ \dfrac{du}{u} = dt\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t-1} = \int\frac{d(t-1)}{t-1} = \ln|t-1| + C_1 = \ln\left|\ln u - 1\right| + C_1,$$

где $C_1 = \ln C$.

Окончательно получим

$\ln\left|\ln u - 1\right| + \ln C = \ln x$; $\quad \ln C\left|\ln u - 1\right| = \ln x$; $\quad x = C\left|\ln u - 1\right|$;

$x = C\left|\ln\dfrac{y}{x-1}\right|$ - общее решение однородного уравнения.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение: Разделим числитель и знаменатель правой части уравнения на x

$y' = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ (однородное уравнение) $\frac{y}{x} = u, y = ux$, тогда $y' = u + xu'$

Подставим в исходное уравнение

$\dfrac{y}{x} = u$ и $y' = u + x\dfrac{du}{dx}$; $\quad u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u}{1-u}$; $\quad x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u}{1-u} - u$;

$x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u-u+u^2}{1-u}$;

$x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u^2}{1-u}$. Разделим переменные $\dfrac{(1-u)du}{1+u^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части уравнения

$\int\dfrac{(1-u)du}{1+u^2} = \int\dfrac{dx}{x}$; $\quad \int\dfrac{du}{1+u^2} - \int\dfrac{udu}{1+u^2} = \int\dfrac{dx}{x}$; $\quad \int\dfrac{du}{1+u^2} - \dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(u^2+1)}{1+u^2} = \int\dfrac{dx}{x}$;

$arctgu - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x + \ln C$; $\quad arctgu = \ln\sqrt{1+u^2} + \ln x + \ln C$;

$arctgu = \ln Cx\sqrt{1+u^2}$;

$Cx\sqrt{1+u^2} = e^{arctgu}$; $\quad Cx\sqrt{1+u^2} = e^{arctg\frac{y}{x}}$;

$C\sqrt{x^2+y^2} = e^{arctg\frac{y}{x}}$ - общее решение однородного уравнения.

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

а) $y'' + 14y' + 49y = 0$

б) $y'' + 5y' + 6y = 0$

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Решение: **а)** Заменяя в данном дифференциальном уравнении функцию y единицей, а ее производные соответствующими степенями r, напишем его характеристическое уравнение.

$k^2 + 14k + 49 = 0$;

$(k+7)^2 = 0$;

$k_{1,2} = -7$ - корни характеристического уравнения

Так как корни равные и действительные, то искомый общий интеграл данного уравнения имеет вид

$y = e^{-7x}(C_1 + C_2 x)$

б) Заменяя в данном дифференциальном уравнении функцию y единицей, а ее производные соответствующими степенями r, напишем его характеристическое уравнение

$k^2 + 5k + 6 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$k_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$ $\qquad$ $k_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$

$k_1 = -3, k_2 = -2$ - корни характеристического уравнения

Так как корни различны и действительные, то искомый общий интеграл данного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$

в) Заменяя в данном дифференциальном уравнении функцию y единицей, а ее производные соответствующими степенями r, напишем его характеристическое уравнение

$k^2 - 4k + 13 = 0$

$D = 16 - 52 = -36$

$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$

$k_{1,2} = 2 \pm 3i$ - корни характеристического уравнения

Так как сопряженные комплексные корни, то искомый общий интеграл данного уравнения имеет вид: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

6. Найти частное решение дифференциального уравнения
$y'' + y' - 6y = 0$ при начальном условии $y(0) = 4$, $y'(0) = 3$

Решение: Заменяя в данном дифференциальном уравнении функцию y единицей, а ее производные соответствующими степенями r, напишем его характеристическое уравнение

$k^2 + k - 6 = 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$k_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ $\qquad$ $k_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$k_1 = -3, k_2 = 2$ - корни характеристического уравнения

Так как корни различны и действительные, то общий интеграл данного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$.

Используем начальные условия $y(0) = 4$, $y'(0) = 3$, предварительно найдя y': $y' = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x}$.

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}, \\ y' = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 e^{2\cdot 0}, \\ 3 = -3C_1 e^{-3\cdot 0} + 2C_2 e^{2\cdot 0}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = C_1 + C_2, \\ 3 = -3C_1 + 2C_2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = 4 - C_2, \\ 3 = -3\cdot(4 - C_2) + 2C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 - C_2, \\ 3 = -12 + 3C_2 + 2C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 - C_2, \\ 5C_2 = 15. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Подставляя значения C_1, C_2 в общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$, имеем $y = e^{-3x} + 3e^{2x}$ - частное решение однородного уравнения.

7. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} x_t' = x + 2y, \\ y_t' = 3x + 2y. \end{cases}$$

Решение: Дифференцируем первое уравнение $x' = x + 2y$ по t: $x'' = x' + 2y'$

Подставим в полученное уравнение

$$y' = 3x + 2y: \quad x'' = x' + 2(3x + 2y) \Rightarrow x'' = x' + 6x + 4y$$

выразим из первого уравнения $2y$: $2y = x' - x$ и подставим в уравнение $x'' = x' + 6x + 4y$:

$$x'' = x' + 6x + 2x' - 2x$$

$x'' - 3x' - 4x = 0$ - линейное однородное дифференциальное уравнение

Составим характеристическое уравнение

$k^2 - 3k - 4 = 0$

$k_1 = 4, k_2 = -1$ - корни характеристического уравнения, т.к. корни действительны и различны, то общее решение: $x = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$

Так как $y = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}x$, $x = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$ и $x' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}$, то получим

$$y = 2C_1 e^{4x} - \frac{1}{2}C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}C_1 e^{4x} - \frac{1}{2}C_2 e^{-x} = \frac{3}{2}C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{cases} x = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}, \\ y = \frac{3}{2}C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$ - общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 8

Краткие теоретические сведения

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – последовательность действительных чисел.

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad (1)$$

называется числовым рядом, а числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ - членами ряда, u_n – общим членом ряда.

Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что ряд (1) сходится и его сумма равна S.

Ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n \quad , \qquad (2)$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительные числа, называется знакочередующимся рядом.

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|. \quad (3)$$

Сходящийся ряд (2) называется условно сходящимся, если ряд (3) расходится.

Необходимое условие сходимости ряда: Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Замечание. Необходимое условие сходимости ряда не является достатчным.

Признаки сходимости (достаточные).

Признак Даламбера. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \ (u_n > 0)$, то при $\rho < 1$ - ряд сходится, при $\rho > 1$ - ряд расходится, при $\rho = 1$- вопрос о сходимости ряда остаётся нерешённым.

Интегральный признак Коши. Ряд с положительными убывающими членами $u_n = f(n)$ сходится или расходится, в зависимости от того , сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x)$ - непрерывная убывающая функция.

Признак сравнения. Если ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (u)$$

сравнить с другим рядом с положительными членами

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (v)$$

Сходимость или расходимость которого известна, и если начиная с некоторого номера *k:*

1) $u_n \le v_n$ для всех ($n > k$) и ряд (v) сходится, то и ряд (u) сходится;

2) $u_n \ge v_n$ для всех ($n > k$) и ряд (v) расходится, то и ряд (u) расходится.

Предельный признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Замечание. Применяя интегральный признак Коши, можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Это часто используется при применении второго признака сравнения.

Радикальный признак Коши. Если для ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \ , \ (u_n > 0)$$

существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, то этот ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$, при k = 1 необходимо применить другой признак.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов, начиная с некоторого номера r, монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, т. е. если выполняются следующие условия:

$$1)\ \ |u_{r+1}| > |u_{r+2}| > |u_{r+3}| > \ldots \ \text{ и } \ 2)\ \lim_{n\to\infty} |u_n| = 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$, члены которого являются функциями от переменной x, называется функциональным.

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n,$$

где $a, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – действительные числа, называется степенным.

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.$$

Степенной ряд (ряд Тейлора при a = 0) относительно независимой переменной

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

называется рядом Маклорена.

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots \qquad -\infty<x<+\infty;$$

$$sh\,x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad -\infty<x<+\infty$$

$$ch\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\ldots \qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\ldots \qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad -1<x\le 1$$

$$arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \qquad -1\le x\le 1$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots$$

при $m\ge 0$, если $-1\le x\le 1$;
при $-1<m<0$, если $-1<x\le 1$;
при $m\le -1$, если $-1<x<1$.

Решение типовых задач

Задача 1. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2+2}$$

Решение: Проверим, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}}=\frac{5}{3}\neq 0.$$

Необходимый признак $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ не выполняется,

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2+2}$ расходится.

Задача 2. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\ldots .$$

Решение: Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Каждый член ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, начиная со второго, больше соответствующего члена гармонического ряда:

$\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{2};\ \frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{1}{3};\ \frac{1}{7}>\frac{1}{4};\ldots\frac{1}{\sqrt{2n-1}}>\frac{1}{n}$, и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то согласно первому признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

Задача 3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Решение: Заменим в данном выражении общего члена ряда $u_n=\frac{1}{n^2}$ номер n непрерывной переменной x и найдем несобственный интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ с бесконечным верхним пределом.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{\beta}+1\right)=0+1=1.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1$, следовательно, согласно интегральному признаку сходится и исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Задача 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{3^n}$.

Решение: Исследуем сходимость ряда по признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$.

$$u_n=\frac{3n-1}{3^n},\ \ u_{n+1}=\frac{3\,(n+1)-1}{3^{n+1}}=\frac{3n+3-1}{3\cdot 3^n}=\frac{3n+2}{3\cdot 3^n}.$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)\cdot 3^n}{3\cdot 3^n(3n-1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{3n-1}=$$

$$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Так как $\rho<1$, то исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3n-1}{3^n}$ сходится.

Задача 5. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n=\dfrac{1}{2^{n+1}-6}$.

Решение: Сравним данный ряд с рядом, который представляет бесконечно убывающую прогрессию с общим членом $v_n=\dfrac{1}{2^n}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ сходится). Применив предельный признак сравнения, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}-6}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2\cdot 2^n-6}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{6}{2^n}}=\frac{1}{2}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ сходится, то по признаку сравнения, сходится и исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}-6}$.

Задача 6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{7}+\left(\frac{3}{12}\right)^2+\left(\frac{5}{17}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^n+\ldots.$$

Решение: Применим радикальный признак Коши

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}}=\frac{2}{5}.$$

Так как $k = \dfrac{2}{5}$, т. е. $k < 1$, то исследуемый ряд, согласно признаку Коши, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+2}\right)^n$ сходится.

Задача 7. Исследовать знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$ и установить характер сходимости (абсолютная, условная).

Решение: Воспользуемся признаком Лейбница и проверим выполнимость его условий:

$$1)\ |u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots \text{ и } 2)\ \lim_{n\to\infty}|u_n| = 0.$$

Запишем несколько последовательных первых членов данного ряда:

$u_1 = -\dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{6}$; $u_3 = -\dfrac{1}{12}$; $u_4 = \dfrac{1}{20}$. Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{12} > \dfrac{1}{20} > \ldots$, стремясь к нулю $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+n} = 0$.

Согласно признаку Лейбница исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$ сходится. Установим характер сходимости, для чего исследуем ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применим интегральный признак

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x} = \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x^2+x} = \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Big|_1^{\beta} =$$

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln|\beta| - \ln|\beta+1| - \ln 1 + \ln 2\right) = \ln 2.$$

Несобственный интеграл сходится.

Согласно интегральному признаку исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$ сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$ сходится абсолютно.

Задача 8. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-x)^n}{2^n \cdot n}$

Решение: Используем признак Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, для чего запишем

$$u_n = \frac{(-x)^n}{2^n \cdot n} \quad \text{и} \quad u_{n+1} = \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}.$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-x)^{n+1}\cdot 2^n \cdot n}{2^{n+1}\cdot(n+1)\cdot(-x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-x)^n\cdot(-x)\cdot 2^n\cdot n}{2\cdot 2^n\cdot(n+1)\cdot(-x)^n}\right| = =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{2}\cdot 1 = \frac{|x|}{2}.$$

Определим, при каких значениях x этот предел будет меньше единицы, т. е. нужно решить неравенство

$$\frac{|x|}{2} < 1,\ |x| < 2,\ -2 < x < 2.$$

Согласно признаку Даламбера, при любом значении x из интервала $-2 < x < 2$ данный ряд сходится.

Граничные точки $x = \pm 2$ из этого интервала, для которых $\rho = 1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо.

При x = - 2 получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{2^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ - расходящийся гармонический ряд.

При $x =$ 2 получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-2)^n}{2^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n\cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ - знакочередующийся ряд, который сходится согласно признаку Лейбница (члены данного ряда по абсолютному значению убывают: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$ и стремятся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$).

Следовательно, интервалом сходимости данного степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-x)^n}{2^n\cdot n}$ является интервал $-2 < x \le 2$.

Задача 9. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, вычислить $\sqrt[4]{108}$ с точностью до 0, 001.

Решение: Используем разложение в ряд

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots$$

$$\sqrt[4]{108}=\sqrt[4]{81+27}=\sqrt[4]{81\left(1+\frac{27}{81}\right)}=3\sqrt[4]{1+\frac{1}{3}}=3\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$3[1+\frac{\frac{1}{4}}{1!}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+$$

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)}{4!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)}{5!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5+\ldots]$$

Выполнив действия, получим : $\sqrt[4]{108}$ = 3 · (1 + 0,0833 – 0,0104 + 0,0020 –
– $[0{,}0005+0{,}0001+\ldots])\approx 3$ · 1,0745 = 3,224.

(Каждое слагаемое нужно вычислить с точностью до 0,0001, чтобы при суммировании не получить погрешность, которая будет больше 0, 001, т. к. ряд знакочередующийся и убывает, то $[u_k-u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots]<|u_k|$).

Задача 10. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, вычислить $\sin 15^0$ с точностью до 0, 001.

Решение: Используем разложение в ряд

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad -\infty<x<+\infty.$$

т. к. $1^0\approx 0{,}017\Rightarrow 15^0\approx 0{,}2618$, то

$$\sin 15^0=\frac{0{,}2618}{1!}-\frac{0{,}2618^3}{3!}+\frac{0{,}2618^5}{5!}-\frac{0{,}2618^7}{7!}+\ldots$$ = 0, 2618 - 0, 003 +…= 0,2615.

(Каждое слагаемое нужно вычислить с точностью до 0,0001, чтобы при суммировании не получить погрешность, которая будет больше 0, 001, т. к. ряд знакочередующийся и убывает, то $[u_k-u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots]<|u_k|$).

Следовательно, $\sin 15^0\approx 0{,}262$.

Задача 11. Вычислить с точностью до 0,001 приближенное значение интеграла $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{x^2}{3}\,dx$.

Решение: Воспользуемся разложением функции $f(x) = \cos x$ в ряд Маклорена:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\ldots \qquad -\infty < x < +\infty .$$

Произведем замену аргумента x на $\frac{x^2}{3}$, тогда получим

следующее разложение функции $f(x) = \cos\frac{x^2}{3}$

$$\cos\frac{x^2}{3} = 1-\frac{x^4}{3^2\cdot 2!}+\frac{x^8}{3^4\cdot 4!}-\frac{x^{12}}{3^6\cdot 6!}+\ldots .$$

Интегрируя в указанных пределах полученное разложение, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{x^2}{3}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^4}{3^2\cdot 2!}+\frac{x^8}{3^4\cdot 4!}-\frac{x^{12}}{3^6\cdot 6!}+\ldots\right)dx =$$

$$\left(x-\frac{x^5}{5\cdot 9\cdot 2}+\frac{x^9}{9\cdot 81\cdot 24}-\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2880}+\ldots = 0{,}5-\left[0{,}00035+\ldots\right]\approx 0{,}5$$

(отбросили третий и последующие члены выражения, так как их сумма меньше 0,0001)

Приближенное значение интеграла с заданной точностью 0,001 равно

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{x^2}{3}\,dx \approx 0{,}5.$$